

**İÇİNDEKİLER****1- BASİT KİRİŞLERİN İÇ KUVVETLERİNİN ANALİZİ**

İç kuvvetler-normal kuvvet:-kesme kuvveti:-eğilme momenti:

Pozitif yönler

***İzostatik Kirişlerin Kesit Tesir Diyagramlarının Çizilmesi***

Kesim Yöntemi ile Kesit tesir diyagramlarının çizilmesi.

Dağıcılık (alan) Yöntemi ile Kesit tesir diyagramlarının çizilmesi.

***İzostatik Çerçevelerin Kesit Tesir Diyagramlarının Çizilmesi*****2-GERBER KİRİŞLER****3-KAFES KİRİŞLER**

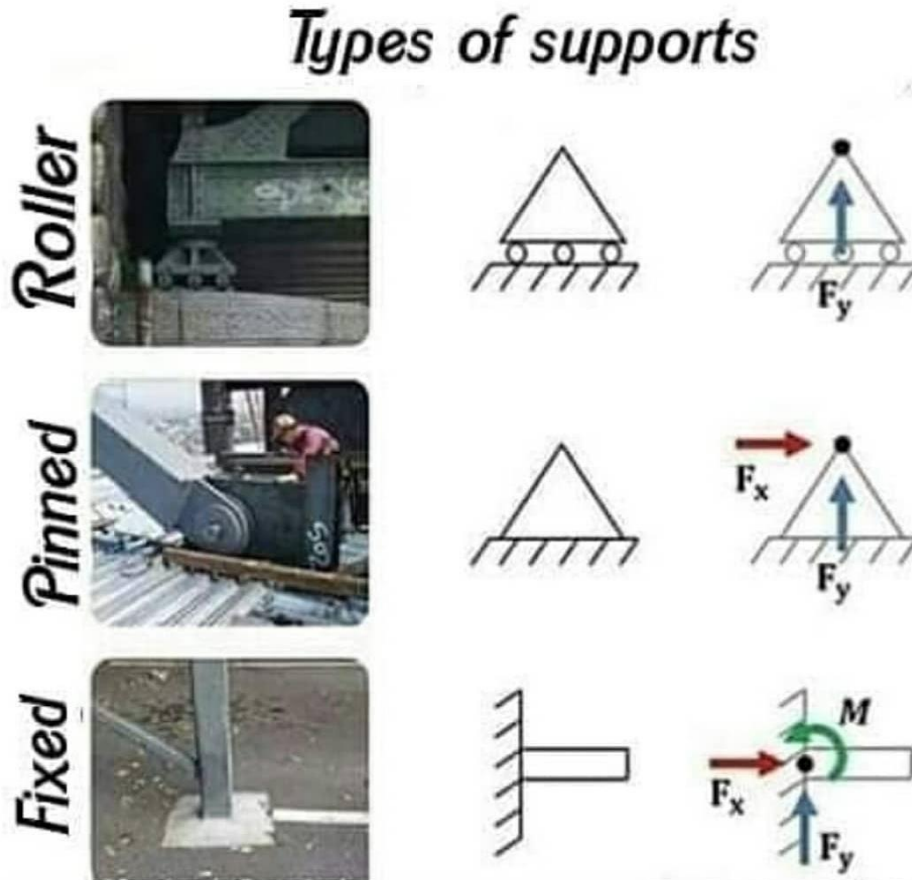
- Düğüm Noktalarının Dengesi Yöntemi İle Kafes Kiriş Çubuk Kuvvetlerinin Hesabı

-Kesim Yöntemi İle Kafes Kiriş Çubuk Kuvvetlerinin Hesabı

**4- HİPERSTATİK SİSTEMLERİN TANITILMASI**

Tek açıklıklı hiperstatik düzlem kirişlerin kesit tesir diyagramlarının tablo yardımıyla çizimi

*Abdulkadir KAN*



Şekil 1: Mesnet tiplerini ve reaksiyonlarını hatırlayalım.

## BASİT KİRİŞLERİN İÇ KUVVETLERİNİN ANALİZİ

Statik bir sisteme dışarıdan etki eden sabit ve hareketli yükler dış kuvvetleri oluşturur. Statik sistem bu dış kuvvetlerin etkisi altında dengede olduğu varsayılarak mesnet reaksiyonları üç denge denklemi ile hesaplanır ve doğru yönleriyle birlikte yerlerine yazılır. Önceki mekanik statik derslerinde İzostatik sistemlerin sadece mesnet reaksiyonlarını hesapladık ve yerlerine birer dış kuvvetmiş gibi etki ettirdik. Oysa dış yüklerin etkisi altında yapısal elemanın kesitinde bir takım zorlanmalar ve kuvvetler oluşmakta ve yapı tasarımı bu kuvvetlere göre yapılmaktadır.

### İÇ KUVVETLER

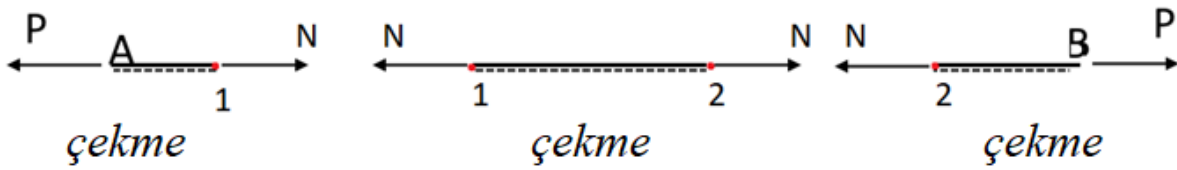
Kirişe etki eden mesnet reaksiyonları dâhil bütün kuvvetler kirişin boy eksenine doğrultusunda bir takım kuvvetler oluştururlar. Bu kuvvetlere iç kuvvetler yâda kesit tesiri denilmektedir. Kesit tesirleri her zaman dış yükler ile denge halindedir. Statikte normal kuvvet (N), Kesme kuvveti (Q) ve eğilme momenti (M) olarak tanımlanan iç kuvvetler, birbiri ile temas halinde olan cisimlerin arasındaki etki ve tepki kuvvetlerinin, aynı şiddette, aynı tesir çizgisi üzerinde ve zıt yönde olduğunu ifade eden etki= tepki prensibi ile uygunluk halindedir.

Bir AB çubuğunu göz önüne alalım. Bu çubuğun her iki ucundan da çekilerek uzatılmak istendiğini varsayalım. Bu çubuğun üzerinde şekildeki gibi 1 ve 2 noktalarından 1-1 ve 2-2 kesiti alalım. Kesim altına noktaların yeri çubuğun özelliği çubuk boyunca değişmediği için rastgeledir.



Şekil 2

Kesilen her parça kendi içerisinde dengede olacağından dış kuvvetlerin etkisiyle oluşan iç kuvvetler (N), dış kuvvetlere (P) eşit ve ters yönde ve aynı tesir çizgisi üzerinde oluşacaktır. Bu örnekte AB çubuğu çekmeye zorlanmaktadır.



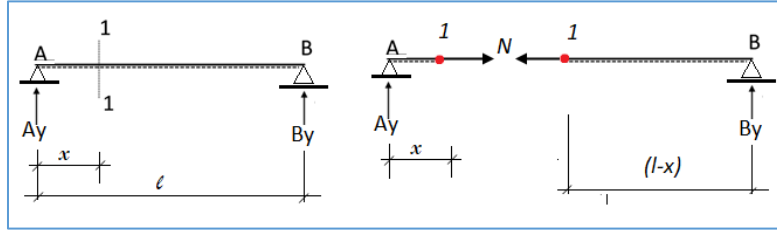
Şekil 3

Kesim yapılan her bir parçanın diğer kısmı silinip elde olan kısma denge denklemi uygulanırsa kesit tesirinin değeri hesaplanmış olur. Çubuk, kendine etkiyen dış kuvvetler ve kesit tesirleri altında dengededir. Çubuk kesitlerinde ortaya çıkan kesit tesirleri, her zaman dış kuvvetlere eşit fakat zıt yönlüdürler.

Şimdi çubuğun sanal olarak kesilmesiyle ortaya çıkan kesit tesirlerini teker teker ele alalım.

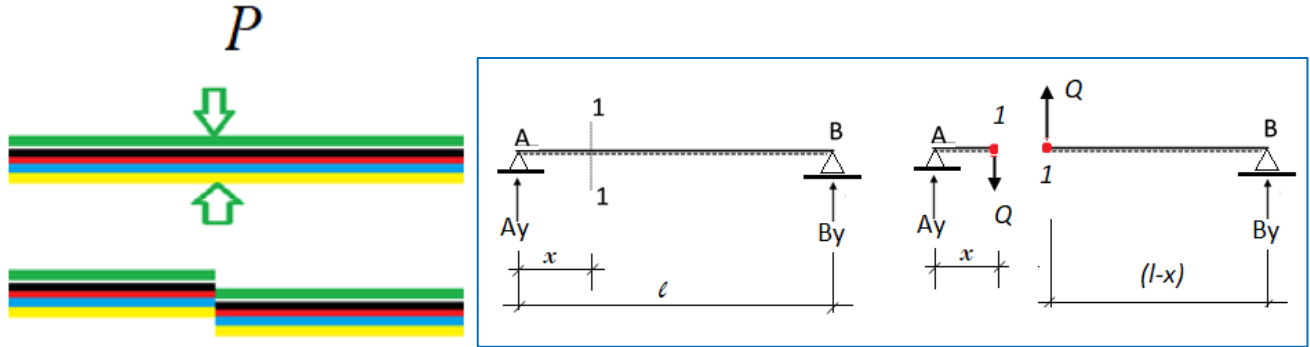
**1-NORMAL KUVVET:** Çubuk boy eksenine PARALEL etkiyen mesnet reaksiyonları dâhil bütün kuvvetler çubuk kesitinde normal kuvvetleri oluştururlar. Normal kuvvetler çubuğun boyunu uzamaya yâda kısaltmaya

zorlarlar. Uzama sonunda kopma, kısalma sonucunda ise ezilme yâda burkulma oluşur. Normal kuvvetleri genel olarak (N) ile gösteririz.



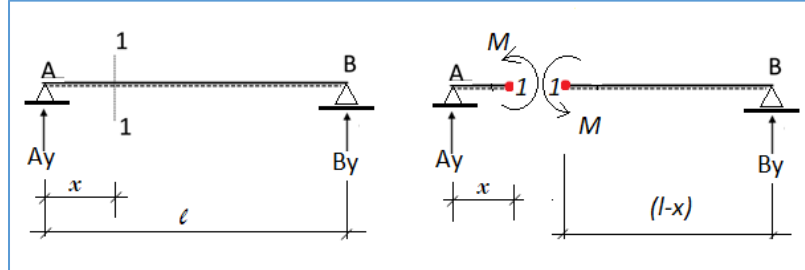
Şekil 4: Normal kuvvet (N) ve pozitif işaretleri

**2-KESME KUVVETİ:** Çubuk boy eksenine DİK etkiyen mesnet reaksiyonları dahil bütün kuvvetler çubuk kesitinde KESME kuvvetlerini oluştururlar. Kesme kuvveti adından da anlaşılacağı üzere çubuğu etki ettiği noktada kesmeye zorlamaktadır.



Şekil 5: Kesme kuvveti (Q) ve pozitif işaretleri

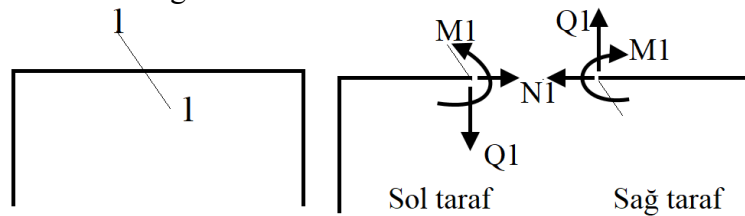
**3-EĞİLME MOMENTİ:** Kirişe etkiyen mesnet reaksiyonları dâhil bütün dış kuvvetlerin kesim yapılan noktaya göre momenti o noktadaki eğilme momentini verir. Eğilme momenti, çubuğun eğilerek göçmesine sebep olur.



Şekil 6: Eğilme momenti (M) ve pozitif işaretleri

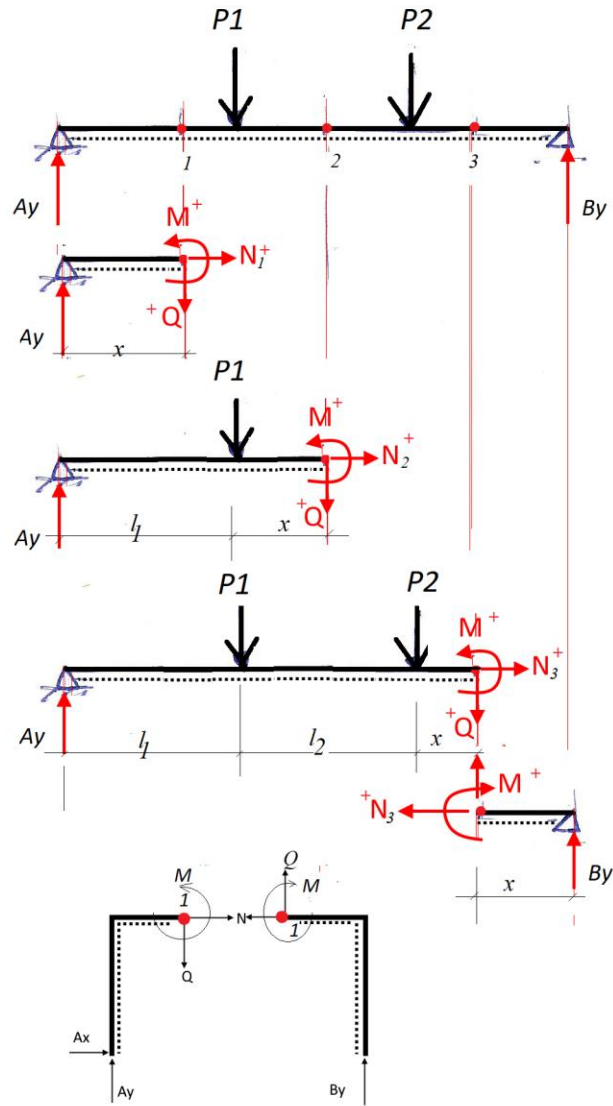
### Pozitif Yönler

Çubuğa, bakış yönü diye tabir edilen noktali kısımdan bakılır ve kesit tesirleri için şu pozitif yönler esas alınır. Şekildeki düzlem kiriş, verilen yükler ve hesaplanan mesnet reaksiyonları etkisi altında dengededir. Kesit tesirlerinin pozitif yönlerini tarif edebilmek için, sistemin bir tarafı keyfi olarak nokta çizgi ile işaretlenir. Noktali taraftan noktasız tarafa bakılırsa sol tarafta kalan kısım sol, sağ tarafta kalan kısım da sağ kabul edilir. Çubuk hayali bir dik kesitten kesilip hayali olarak iki kısma ayrılır. Bu iki kısımda ayrı ayrı kendine etkiyen dış kuvvetlerin ve kesit tesirleri altında dengededir.



Şekil 7: Kesit tesirlerinin doğru yönleri

*Kesit tesirleri hesabında pozitif yönler*



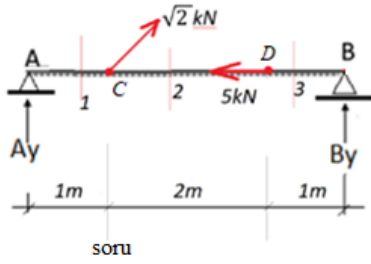
**Şekil 8:** Kesit tesirlerinin etki sınırları ve doğru yönleri

### MİSAL:

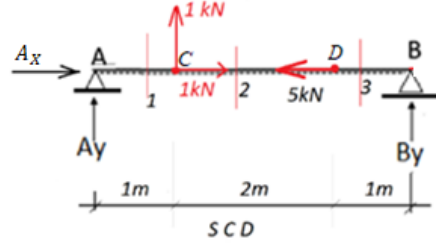
Şekilde verilen kirişin C ve D noktalarına tekil kuvvet etki ettirilmiştir. 1-1, 2-2 ve 3-3 kesitlerinde oluşan normal kuvvetleri (N) hesaplayınız.  $y=N$

### ÇÖZÜM:

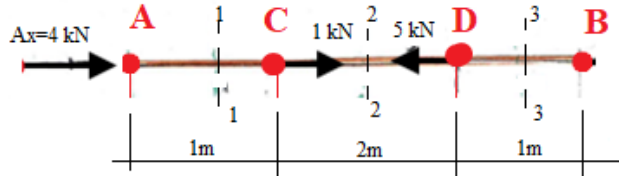
Önce SCD çizilir ve mesnet reaksiyonları hesaplanır. Mesnet reaksiyonları doğru yönleri gösterilerek yerlerine çizilir. Değerleri yazılır.



Önce SCD çizilir ve mesnet reaksiyonları hesaplanır.

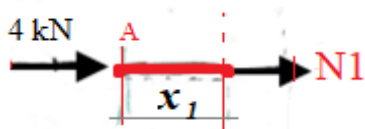


$$\sum \overset{\rightarrow}{F}_x = 0 \quad A_x + 1 - 5 = 0 \quad A_x = +4 \text{ kN} \rightarrow$$

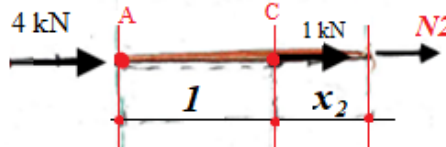


Sonra sırasıyla 1-1, 2-2 ve 3-3 kesitleri yapılarak kesim yapılan kısımdan sağ veya sol kısım silinir. Geri kalan kısma ilgili kesit tesirleri çizilerek değerleri üç denge denklemi ile hesaplanır.

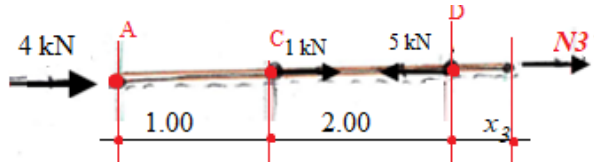
**1-1 kesimi:** Kiriş AC arasından herhangi bir yerden sanal olarak kesilir ve sağ tarafı silinir. Elde kalan sol tarafın kesilen ucuna iç kuvvet belirtilir ve denge denklemi yardımıyla bu iç kuvvet (kesit tesiri) hesaplanır.

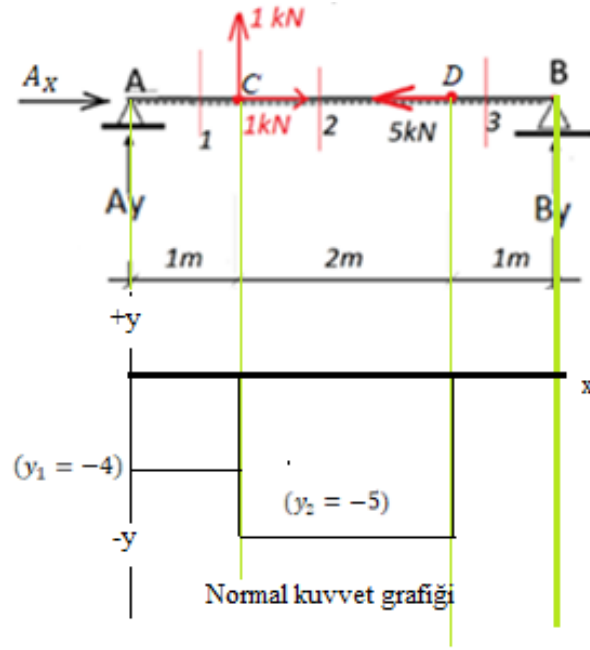

$$\sum \overset{\rightarrow}{F}_x = 0, \quad N_1 + 4 = 0, \quad N_1 = -4 \text{ kN} \leftarrow (AC \text{ arası basınç})(y_1 = -4)$$

**2-2 kesimi:** Kiriş CD arasından herhangi bir yerden kesilir ve sağ tarafı silinir. Aynen 1-1 kesiminde yapıldığı gibi, elde kalan sol tarafın kesilen ucuna iç kuvvet belirtilir ve denge denklemi yardımıyla bu iç kuvvet (kesit tesiri) hesaplanır.


$$\sum \overset{\rightarrow}{F}_x = 0, \quad N_2 + 4 + 1 = 0, \quad N_2 = -5 \text{ kN} \leftarrow (CD \text{ arası basınç})(y_2 = -5)$$

**3-3 kesimi:** Kiriş DB arasından herhangi bir yerden kesilir ve sağ tarafı silinir. Aynen 1-1, 2-2 kesiminde yapıldığı gibi, elde kalan sol tarafın kesilen ucuna iç kuvvet belirtilir ve denge denklemi yardımıyla bu iç kuvvet (kesit tesiri) hesaplanır.


$$\sum \overset{\rightarrow}{F}_x = 0, \quad N_3 + 4 + 4 - 5 = 0, \quad N_3 = 0, \quad (y_3 = 0)$$



### MİSAL :

Verilen kirişin 1-1, 2-2 ve 3-3 kesitlerinde oluşan Kesme kuvvetlerini ( $Q$ ) hesaplayınız.  
 $y=Q$

### ÇÖZÜM:

Önce Mesnet reaksiyonları hesaplanır.

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 3 - 7 + 4 = 0 \quad A_y + B_y = 6 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright + \sum M_A = 0$$

$$3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 4 \cdot B_y$$

$$B_y = 1,25 \text{ kN} \quad A_y = 4,75 \text{ kN}$$

1-1 kesimi

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-Q_1 + 4,75 = 0 \quad Q_1 = +4,75 \text{ kN}$$

2-2 kesimi

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-Q_2 + 4,75 - 3 = 0 \quad Q_2 = +1,75 \text{ kN}$$

3-3 kesimi

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

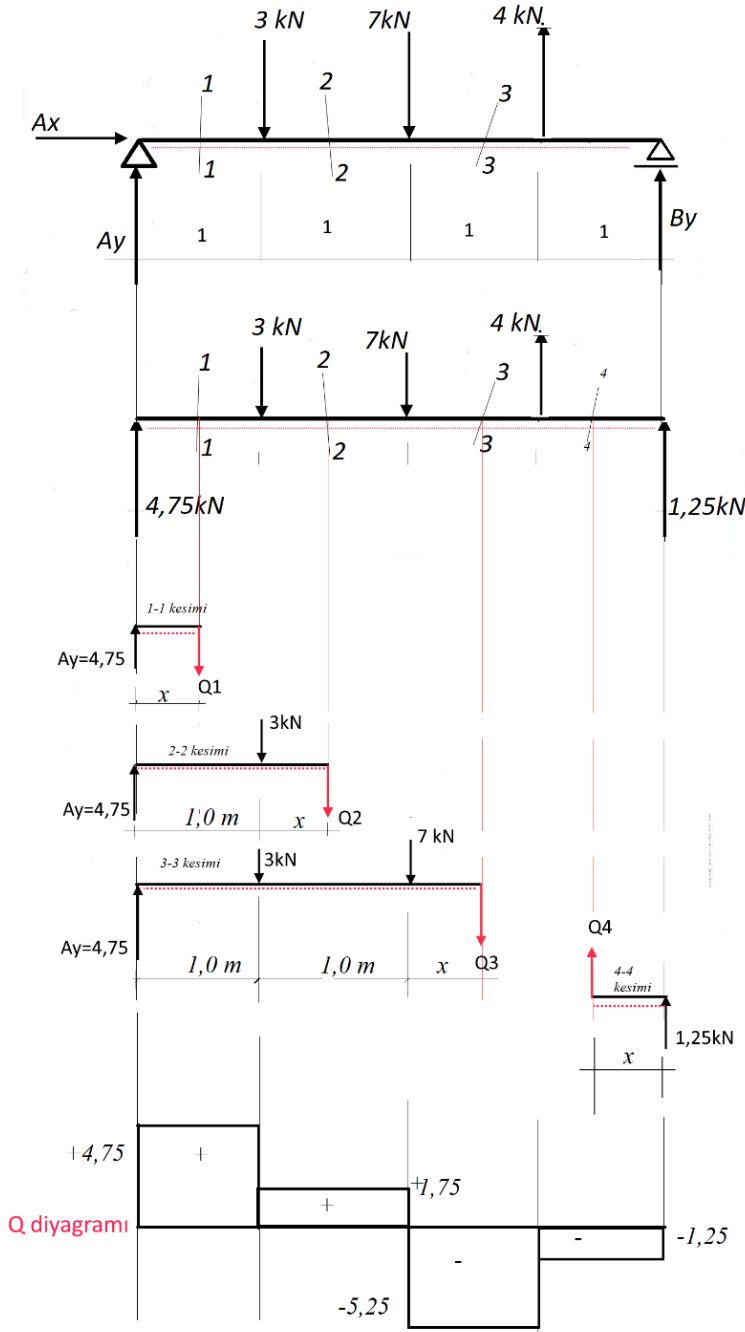
$$Q_3 - 4,75 + 3 + 7 = 0 \quad Q_3 = -5,25 \text{ kN}$$

4-4 kesimi

Bu sefer kirişin sol tarafını kesip attık. Sağ tarafta daha az işlem olduğu için bu kısmı göz önüne aldık. İşaret kuralına dikkat ediniz.

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$Q_4 + 1,25 = 0 \quad Q_4 = -1,25 \text{ kN}$$



## İZOSTATİK KİRİŞLERİN KESİT TESİR DİYAGRAMLARININ ÇİZİLMESİ

Kirişe etkiyen yükler sonucunda kiriş kesitinde oluşan zorlanmaların yeri ve büyüklüğü çizilen grafikler yardımıyla görülebilir. Sabit yüklerden meydana gelen kesit tesirleri fonksiyonlarının grafiklerine kesit tesirleri diyagramları denilir.

Verilmiş bir basit kirişin kesit tesir diyagramları bu işlem için hazırlanmış bilgisayar yazılımlarını saymazsak, iki şekilde hesaplanıp çizilebilir.

1-Kesim yöntemi: Bu yöntemde kirişin mesnet reaksiyonları hesaplandıktan sonra kiriş üzerinde uygun yerlerden kesim yapılarak, ele alınan parça üzerinde üç denge denklemi uygulanır. Elde edilen denklemlerde “x” yerine uzunluklar yazılarak “y” MNQ kesit tesirleri hesaplanır. Elde edilen noktalar x;y eksen takımında işaretlenerek birleştirilir.

2-Dağıcılık Yöntemi: Bu yöntem, kesim yöntemi öğrenildikten ve çeşitli ispatlar yapıldıktan sonra sıkça kullanılan profesyonel yöntemdir. Diğer yöntemle kıyasla çok az zaman alır.

Kesit tesir diyagramları çizilirken şu kurallara uyulmalıdır. Bu kurallar kesim yöntemi işlenirken elde edilen deneyimlerden çıkarılmıştır.

-Bir kirişin herhangi bir noktasındaki kesme kuvveti diyagramının alanı bize aynı noktadaki eğilme momenti değerini verir. Yani;  $Q_{alan} = Moment$

-Kesme kuvveti denkleminin integrali bize eğilme momenti denklemini verir.

$$M = \int Q(x) \cdot dx$$

-Çubuk üzerinde Kesme kuvvetinin sıfır olduğu yerlerde eğilme momenti diyagramı yön değiştirir yada büyük değer alır.

-Yayıllı yüklerin Q ve M diyagramları çizilirken yayılı yükün etkiye şekli (üniform, üçgen vs) dikkate alınmalı, , çubuk uzunluğu boyunca düzenli bir şekilde alçalma veya yükselme yapılmalıdır.

-Kesme kuvvetinin pozitif olduğu çubuk açıklığında uzunluk arttıkça momentte artar. Q nun negatif olduğu açıklıklarda bunun tersi olur.

-Basit kirişlerdeki mesnet reaksiyonları o nokradaki kesme kuvvetini verir.

-Yük olmayan çubuk açıklığında kesme kuvveti diyagramı yatay ilerler.

-Tekil yüklü çubuklarda kesme kuvveti diyagramı dikdörtgen, moment diyagramı üçgen olur.

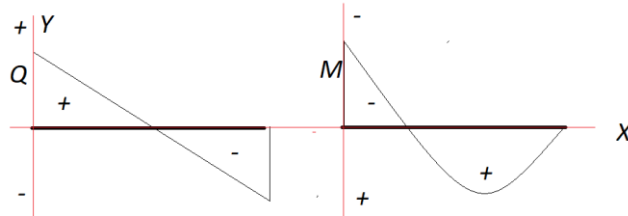
-Düzgün yayılı yüklerde kesme kuvveti diyagramı üçgen, moment diyagramı parabol şeklinde olur.

-Üçgen yayılı yüklerde kesme kuvveti diyagramı 2. Derece parabol, moment diyagramı hiperbol olur.  $Q_{alan} = Moment$

-Kesit tesir diyagramları mutlaka kapanmalıdır. Açık kalmaz.

-Kesme kuvveti diyagramlarının alanlarının toplamı sıfır olmalıdır. Böylece moment diyagramı kapanmış olur. Sıfır olmaz ise ya reaksiyonlar yanlış hesaplanmıştır ya da farkın ters işaretlisi kadar sisteme etkiyen nokta moment vardır.

Genel olarak düzlem sistemlere ait kesit tesirleri diyagramları çizilirken kesme kuvvetlerinin pozitif yönleri yukarıya doğru, eğilme momentinin pozitif yönü ise aşağı doğru alınır.



Kiriş açıklığına bağlı olarak bir kesit tesiri oluşuyor ise, kiriş açıklığını (x) eksen, kesit tesir değerini de (N, Q, M) y-y ekseninde gösterip elde ettiğimiz noktaları birleştirdiğimizde kesit tesiri diyagramı çizilmiş olur.

Moment diyagramından faydalanarak kirişin nasıl bir şekilde eğileceği (deformasyona uğrayacağı) tahmin edilebilir. Moment diyagramının (+) alanlarının bulunduğu bölgelerde kiriş su tutar tarzda (kase gibi), eğilirken, eksi (-) alanların bulunduğu bölgelerde su tutmayacak tarzda (ters kase) eğilir.

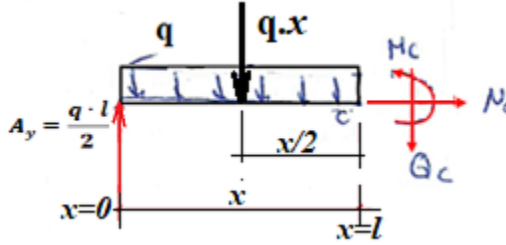
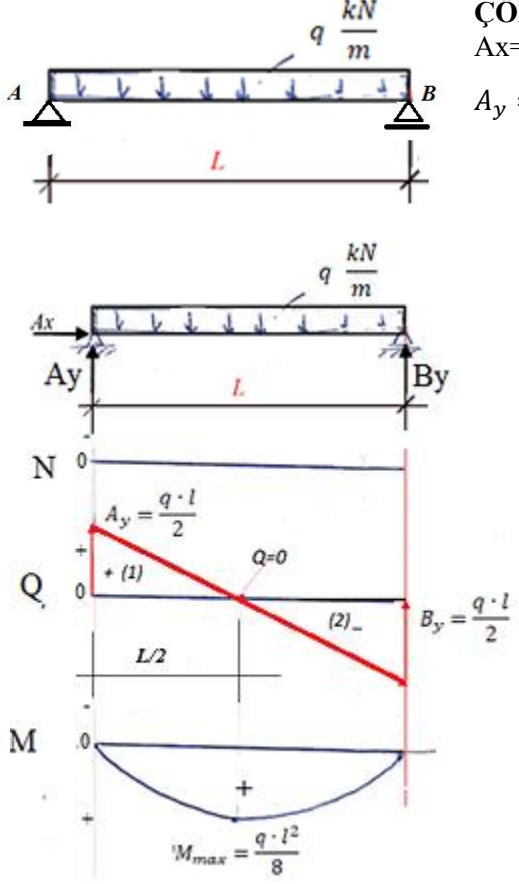
## Kesim Yöntemi ile Kesit tesir diyagramlarının çizilmesi.

Verilen kirişin önce mesnet reaksiyonları hesaplanır. Doğru yönleri ile yerlerine yazılır. Sonra kesim için kiriş uygun yerlerinden yeteri kadar işaretlenir. Bu işaretli yerler rast gele olmayıp yük özelliğinin değiştiği yerler olmalıdır. Bu metodu iki ucu basit mesnetli düzgün yayılı yüklü bir kiriş üzerinde açıklayalım.

**SORU:** Şekilde verilen düzgün (üniform) yayılı yüklerle yüklenmiş basit kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız. Kesim yöntemi ile kesit tesiri denklemlerini elde ediniz ve kesit tesir diyagramlarını çiziniz.

**ÇÖZÜM:** Önce mesnet reaksiyonları hesaplanır. Yatay kuvvet etkilediği için  $A_x=0$  dır. Simetriden dolayı  $A_y$  ve  $B_y$  mesnet reaksiyonları eşit olur.

$$A_y = B_y = \frac{q \cdot l}{2};$$



Kesit tesir denklemleri, kiriş açıklığı boyunca herhangi bir yerden kesildiğinde ortaya çıkan iç kuvvetlerin dengesi araştırılarak hesaplanabilir. Kiriş açıklığı boyunca yük etkisi değişmediği için herhangi bir yerden keselim. Kesim yaptığımız noktadan sağ tarafı silelim.

Geri kalan sol tarafta iç kuvvetler için denge denklemlerini kuralım.

$$\sum \rightarrow F_x = 0 \quad N_c = 0$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad -Q_c + \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x = 0 \quad \boxed{Q_c = -q \cdot x + \frac{q \cdot l}{2}}$$

Bu  $y=m \cdot x+n$  şeklinde bir doğru denklemdir. "x" in katsayısı "m" eğim olduğuna göre "-" eğimli bir doğru çizilecektir.

Denklemdaki "x" yerine kiriş açıklığındaki "0, L/2 ve L" değerlerini yazarsak "y" değerini yani "x" e karşılık gelen kesme kuvvetini (Q) bulabiliriz. Elde edilen nokta grafikte işaretlenir.

Noktalar birleştirilince grafik çizilmiş olur.

$$x = 0 \text{ ise } Q(y) = -q \cdot x + \frac{q \cdot l}{2} = -q \cdot 0 + \frac{q \cdot l}{2} = Q(y) = \frac{q \cdot l}{2} \text{ olur. } A\left(0; \frac{q \cdot l}{2}\right) \text{ noktası}$$

$x=0$  olduğu yer kirişin başlangıcı olup A noktasıdır. Burada  $A_y$  mesnet reaksiyonu kiriş boy eksenine dik etkiyordur ve kesme kuvveti etkisi yapmaktadır.

$$x = \frac{L}{2} \text{ ise } Q(y) = -q \cdot x + \frac{q \cdot L}{2} = -q \cdot \frac{L}{2} + \frac{q \cdot L}{2} = Q(y) = 0 \text{ olur. } C\left(\frac{L}{2}; 0\right) \text{ noktası}$$

$$x = L \text{ ise } Q(y) = -q \cdot x + \frac{q \cdot L}{2} = -q \cdot L + \frac{q \cdot L}{2} = Q(y) = -\frac{q \cdot L}{2} \text{ olur. } B\left(L; -\frac{q \cdot L}{2}\right) \text{ noktası}$$

$x=L$  olduğu yer kirişin son ucu olup B noktasıdır. Burada  $B_y$  mesnet reaksiyonu kiriş boy eksenine dik etkiyordur ve kesme kuvveti etkisi yapmaktadır. A,C,B noktaları kiriş alt kısmına hazırlanan Q grafiğinde işaretlenip birleştirilirse kirişin kesme kuvveti diyagramı çizilmiş olur. Bu denklemin integrali alınırsa eğilme momenti "M" denklemi elde edilir. Eğilme momenti aynı zamanda kesme kuvveti alanına da eşittir. Yani kesme kuvveti diyagramlarının alanı bize o noktadaki momenti verir.

$$\text{Kesme kuvveti diyagramının alanı } M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Şimdi 1-1 kesiminden faydalanarak eğilme momenti denklemini çıkaralım.

Not: Kesim yapılan noktadan moment alınır. Saat istikameti "+" alınır.

$$\sum \curvearrowright M_c = 0 \quad -M_c - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + q \cdot \frac{L}{2} \cdot x = 0 \quad \boxed{M_c = -q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot x}$$

$y=ax^2+bx+c$  türü parabol denklemdir. “x” e değer verilerek “y” hesaplanır.

$x = 0$  ise  $M(y) = 0$  Çünkü x in sıfır olduğu yer A mesnedidir. A mesnedi sabit mesnettir ve moment aktarmaz.

$$x = \frac{L}{2} \text{ ise } M(y) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot x \rightarrow \rightarrow M = +\frac{q \cdot L^2}{8} \quad C\left(\frac{L}{2}; \frac{q \cdot L^2}{8}\right)$$

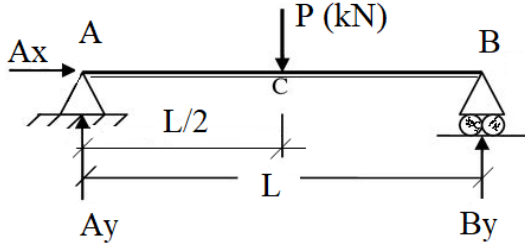
Kesme kuvveti kirişin ortasında sıfır çıkmıştı. Kesme kuvvetinin sıfır olduğu yerde eğilme momenti en büyük değerine ulaşır. Eğilme momenti diyagramı yön değiştirir.

$x = L$  ise  $M(y) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q \cdot L}{2} \cdot x \rightarrow \rightarrow M = 0 \quad B(L; 0)$  Çünkü  $x=L=0$  olduğu yer B mesnedidir. B mesnedi basit mesnettir ve moment aktarmaz.

A, B ve C noktaları M diyagramında yatay eksen x ekseni düşey eksen y ekseni (M) olacak şekilde işaretlenir ve parabol çizilir.

**MİSAL:**

Şekilde verilen ortasından tekil yüklü basit kirişin kesit tesirlerini hesaplayıp, diyagramlarını çiziniz.  $P=kN$



$$A_x = 0$$

$$A_y = B_y = P/2$$

(Bir önceki örnekte düzgün yayılı yükte kiriş açıklığında bir kesit almak yetiyorken bu örnekte A mesnedinden P kuvvetine kadar ve P kuvvetinden B mesnedine kadar olan bölgede olmak üzere iki kesit almalıyız) Mesnet reaksiyonları hesaplanıp doğru yönleriyle birlikte yerlerine yazıldıktan sonra,

1-1 Kesimi A mesnedi ile P kuvvetine kadar olan herhangi bir yerden

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 = 0 \quad (\text{yatay kuvvet olmadığı için})$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad -Q_1 + \frac{P}{2} = 0 \quad \boxed{Q_1 = +\frac{P}{2}} \quad (y = \frac{P}{2})$$

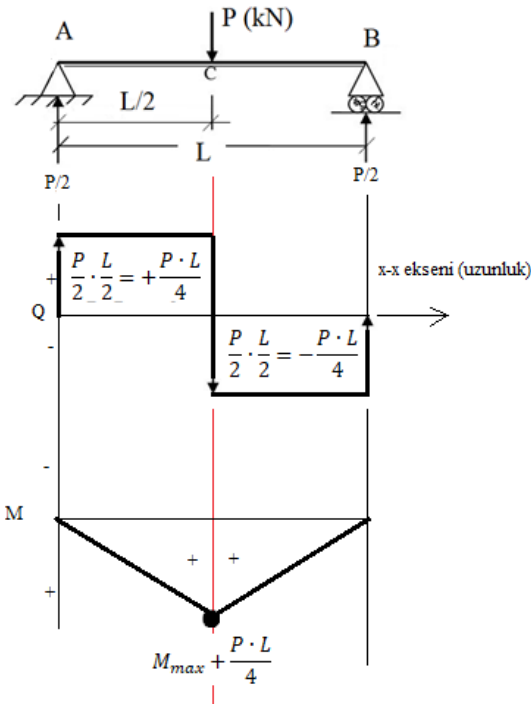
Kesim yapılan yerden moment alalım.

$$\curvearrowright + \sum M_1 = 0 \quad -M_1 + \frac{P}{2} \cdot x = 0 \quad \boxed{M_1 = \frac{P}{2} \cdot x}$$

$x = 0$  ise  $M_1 = 0$  (A mesneti basit mesnet olup moment aktarmaz)

$x = \frac{L}{2}$  ise  $M_1 = \frac{P \cdot L}{4}$  olur (Kesme kuvveti diyagramı alanı)

2-2 Kesimi P kuvveti ile B mesnedine kadar olan herhangi bir yerden



$$\sum F_x = 0 \quad N_2 = 0 \quad (\text{yatay kuvvet olmadığı için})$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad -Q_2 - P + \frac{P}{2} = 0 \quad \boxed{Q_2 = -\frac{P}{2}} \quad (y = -\frac{P}{2})$$

Kesim yapılan yerden moment alalım.

$$\curvearrowright + \sum M_2 = 0 \quad -M_2 + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + x_2\right) - P \cdot x_2 = 0$$

$$\boxed{M_2 = \frac{P \cdot L}{4} - \frac{P}{2} \cdot x_2}$$

$x_2 = 0$  ise  $M_2 = \frac{P \cdot L}{4}$  (kirişin ortası)

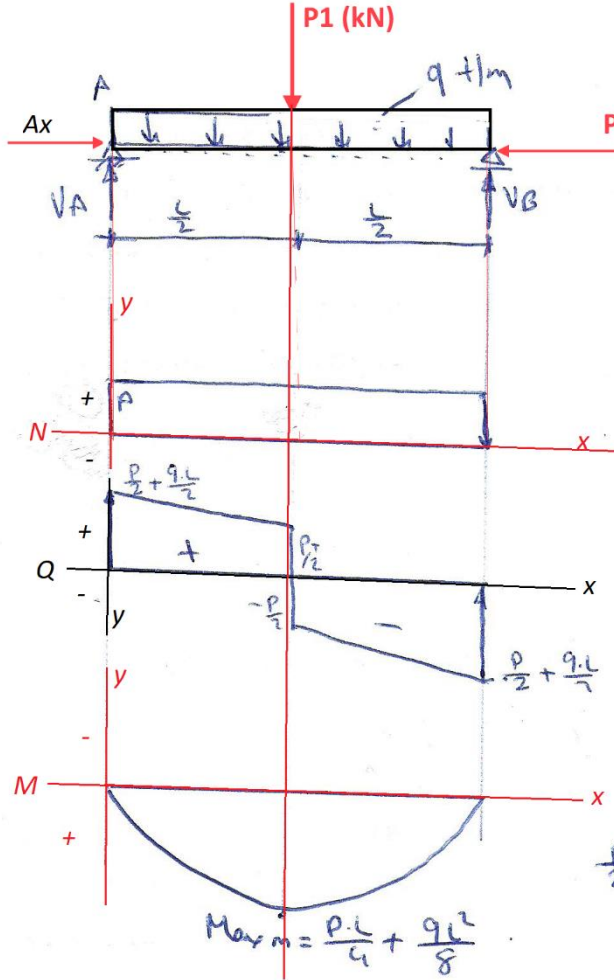
$x_2 = \frac{L}{2}$  ise  $M_2 = 0$  (B mesnedi)

Hesaplanan denklemlerde elde edilen veriler grafiğe dönüştürülür, yani denklemlerdeki “x” mesafesine kiriş açıklığının değerleri yazılarak elde edilen noktalar (x;y) bir grafikte birleştirilerek kirişin kesit tesir diyagramı çizilmiş olur. Böylece kirişin en fazla nerede ve nasıl zorlandığı bulunmuş olur.

Misal:

Verilen basit kirişin kesit tesir fonksiyonlarını eldeedip, grafiklerini çiziniz. B mesnetine yatay P2 etki etmektedir.

(Üniform yayılı yük ve tekil yük kombinasyonu)



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - P = 0 \quad \boxed{A_x = P} \text{ Basıns.}$$

$$\sum M_A = 0$$

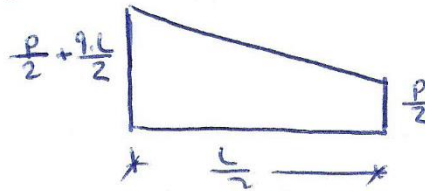
$$P \cdot \frac{L}{2} + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = V_B \cdot L$$

$$\boxed{V_B = \frac{P}{2} + \frac{qL}{2}} \quad \boxed{V_A = \frac{P}{2} + \frac{qL}{2}}$$

maxM=Kesme kuvveti diyagramı alanlarının birisine eşittir. (simetri var)

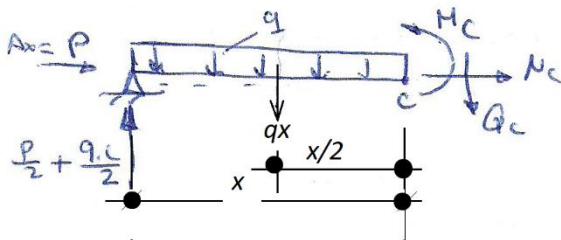
$$M = \left( \frac{P}{2} + \frac{qL}{2} + \frac{P}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4} + \frac{qL^2}{8}$$



Kesit tesir fonksiyonlarını hesaplayabilmek için A mesneti ile P1 arası ve P1 ile B mesneti arası olmak üzere iki kesim yapılmalıdır.

1- A mesneti ile P1 arası



$$\sum F_x = 0 \quad N_c + A_x = 0$$

$$\boxed{N_c = -A_x}$$

$$\sum F_y = 0 \quad M_c + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \left( \frac{P}{2} + \frac{qL}{2} \right) \cdot x = 0$$

$$M_c + \frac{qx^2}{2} - \left( \frac{P}{2}x + \frac{qL}{2}x \right) = 0$$

$$M_c + \frac{qx^2}{2} - \frac{P}{2}x - \frac{qL}{2}x = 0$$

$$M_c = -\frac{qx^2}{2} + \frac{P}{2}x + \frac{qL}{2}x$$

$$x=0 \quad M=0$$

$$x=L/2 \text{ için } M = \frac{P \cdot L}{4} + \frac{qL^2}{8} \text{ alın}$$

$$\max Q = Q_{\text{tekil}} + Q_{\text{yayılı}}$$

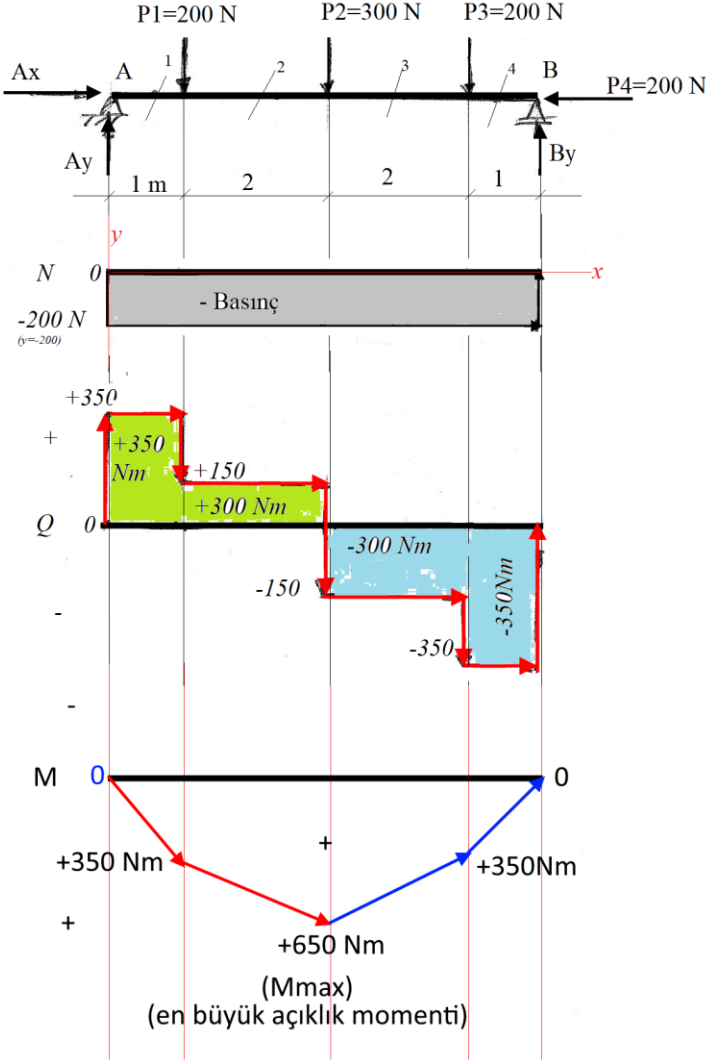
$$\max M = M_{\text{tekil}} + M_{\text{yayılı}}$$

## Dağıcılık (alan) Yöntemi ile Kesit tesir diyagramlarının çizilmesi.

### Misal:

Verilen basit kirişin kesit tesirlerini hesaplayıp diyagramlarını çiziniz. En büyük kesme kuvveti ve açıklık momentleri kirişin neresinde oluşmaktadır?

**ÇÖZÜM:** Şekilden de anlaşılacağı üzere, kuvvetlerin tesir çizgileri çizildiğinde dört farklı etki bölgesi oluşmaktadır. Bu kirişin NQM diyagramlarını çizebilmek için kiriş açıklığının dört yerinden kesim yapmak ve denklemleri çıkarmak gerekir. Bu işlem uzun ve zaman alıcıdır. Normal kuvvet (çekme+, Basınç -) diyagramının nasıl çizilebildiği önceki örnekte anlatılmıştır. Mesnet reaksiyonlarının hesabından sonra, reaksiyon ve etkiyen kuvvetlerin yönlerine bakarak A dan B ye doğru ilerlerken, kuvvetlerin şiddetleri kadar düşey olan tesir çizgisi boyunca aşağı, yukarı zıplanırsa en son B de şekli kapatarak Q diyagramı çizilebilir. Bunu örnek üzerinde anlatalım.



### Mesnet Reaksiyonlarının hesabı

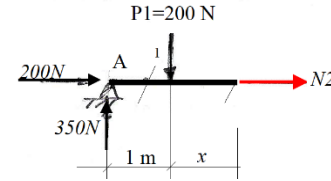
Simetrik yükleme ve geometriden dolayı

$$A_y = B_y = \frac{(P_1 + P_2 + P_3)}{2} = \frac{200 + 300 + 200}{2} = 350 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - 200 = 0 \dots \dots A_x = 200 \text{ N}$$

$A_x$ , burada + çıktı çünkü  $P_4$  kuvvetine tepki olarak var. İki kuvvet arasındaki AB kirişi kuvvetlerin basınç etkisi altındadır. Normal kuvvet diyagramında Basınç  $x-x$  ekseninin altındaki kısımda gösterilir.  $y = -200$  denklemleri Normal kuvvetin basınç olduğu yani eksi bölgede çizilmesi gerektiği her hangi bir yerden kesit alınarak ispatlanabilir.



$$\sum F_x = 0; \quad N_2 + A_x = 0$$

$$N_2 + 200 = 0 \quad N_2 = -200$$

İşlem sonucunun (-) eksi çıkması  $N_2$  eksenel kuvvetinin yönü değiştirilecek anlamına gelir. Bu durumda AB çubuğu basınca zorlanıyor demektir.

### Kesme Kuvveti Diyagramının çizimi

$A_y = B_y = 350 \text{ N}$  hesaplanmıştı. Kesme kuvveti diyagramı dağıcılık (alan) yöntemi ile çizilirken önce  $x$  eksenini yatayda çizilir. A noktasından yukarı doğru  $A_y$  kadar yani +350 N yukarı çıkılır. İki kuvvet arasında B ye doğru ilerlenir.

doğru yatay ilerlenir.  $P_1$  kuvvetinin tesir çizgisine gelinir. Aşağı doğru  $P_1$  kadar yani +200 N inilir. +150 N dayız. B ye doğru ilerlemeye devam ederiz ve  $P_2$  nin tesir çizgisine geliriz. Aşağı doğru  $P_2 = +300 \text{ N}$  ineriz. Yatay çizginin altına yani (-) bölgeye geçeriz. -150 N dayız. B ye doğru ilerlemeye devam ederiz ve  $P_3$  ün tesir çizgisine geliriz. Aşağı doğru  $P_3 = +200 \text{ N}$  ineriz. -150 N deydik aşağı doğru  $P_3 = 200 \text{ N}$  daha inersek -350 N da oluruz. B ye doğru yatay ilerleriz ve  $B_y$  nin tesir çizgisine geliriz. Biz -350 N deyiz.  $B_y = +350 \text{ N}$  olduğuna göre yukarı çıkar ve diyagramı kapatırız. Q diyagramı hiç kesim yapılmadan çizilmiş oldu. Artık kesme kuvveti açısından kirişin en fazla nerede zorlandığını bulabiliriz.

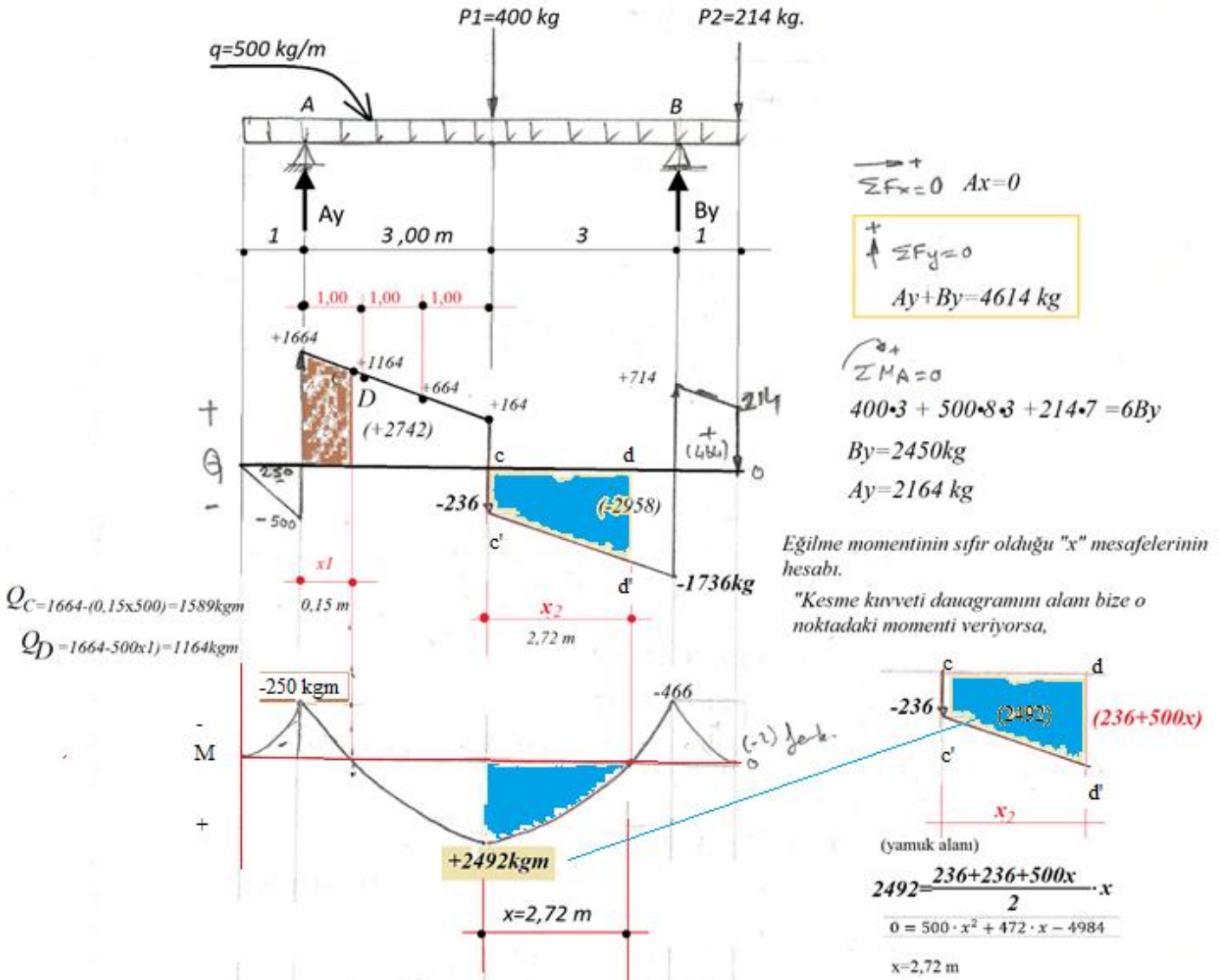
Q diyagramının alanları hesaplanır ve + - şeklinde içlerine yazılır. Q diyagramının alanlarının toplamı sıfır olmalıdır. Fark varsa ya MR yanlış hesaplanmıştı ya da kirişe bu farkın ters işaretlisi kadar tekil bir M nokta momentini eklemektedir.

Kesme kuvveti diyagramının alanı bize o noktadaki eğilme momentinin değerini verir. Eğilme momentini diyagramı çizilirken, hesaplanan kesme kuvveti alanları yığışımı olarak toplanır. Q diyagramı dörtgen olduğu zaman M diyagramı üçgen olurdu. A ve B mesnetlerinde  $M=0$  dir. Çünkü buralar basit mesnettir.

**Misal:** Verilen iki uçtan çıkmalı kirişin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.

15.3 2022

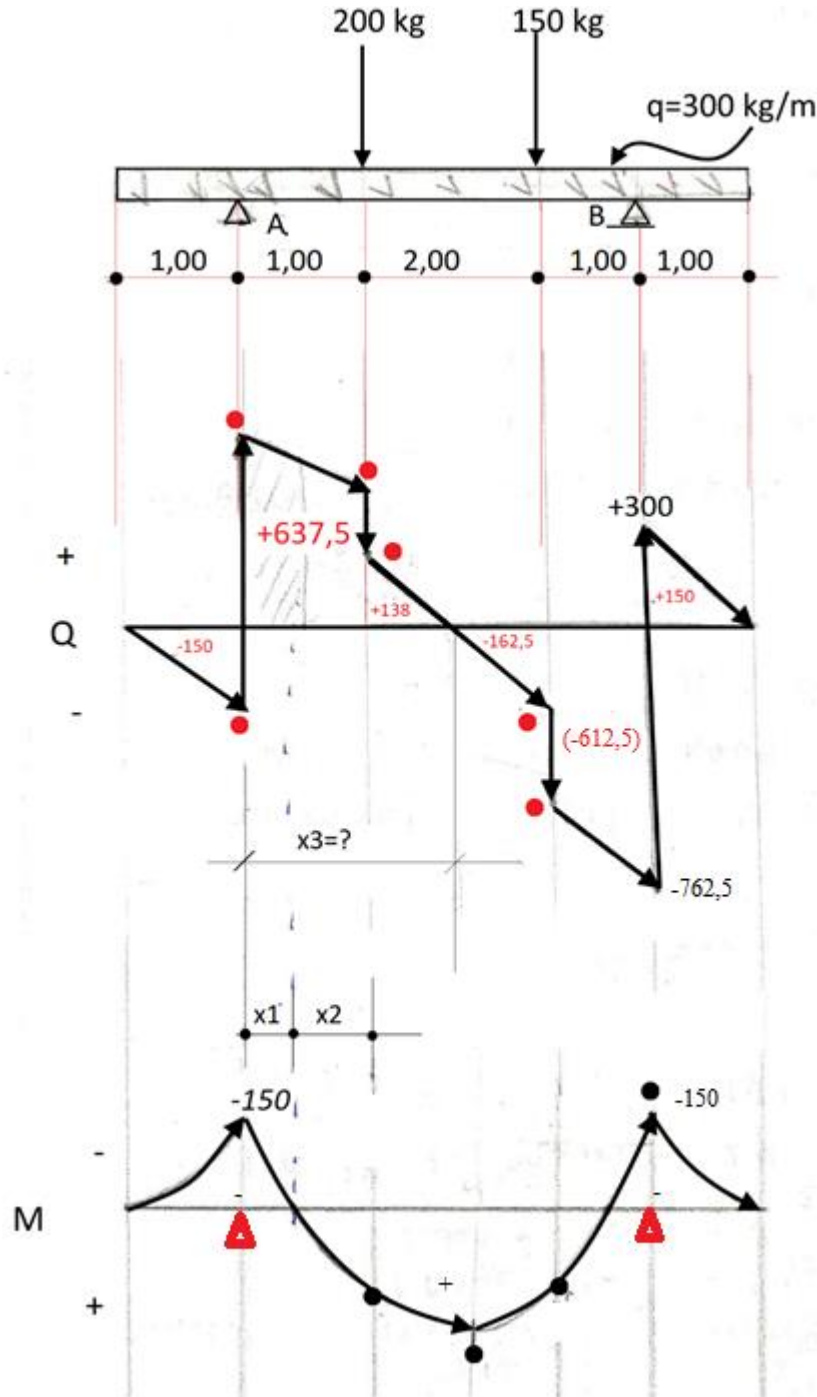
(Çıkmalı kirişlerde mesnet üzerinde negatif mesnet momenti adı verilen momentler oluşur. Bu momentler genelde negatiftir.



Kesme kuvveti diyagramı çizilirken tahminen şu konuşmayı yapıyor olmanız gerekir. ☺

Kirişin en sol ucundan başlıyorum. Yayılı yük olduğu için, Metrede 500 inirim. -500kg dayım,  $Ay=+2164 \text{ kg}$  kadar yukarı çık (ok öyle gösteriyor),  $-500+2164=+1664 \text{ kg}$  dayım. Buradan B ye doğru gitmek isterken yayılı yük olduğu için yayılı yükün şiddeti kadar ileri doğru aşağı inirim, Metrede 500 inirsem 3 metrede 1500 inirim.  $1664-1500=+164 \text{ kg}$  dayım. Burada bir tesir çizgisi var.  $P=400 \text{ kg}$  Aşağı in.  $(+164-400)=-236 \text{ kg}$  dayım. B ye doğru ilerlerken Metrede 500 inirsem 3 metrede 1500 inirim.  $-236-1500=-1736 \text{ kg}$  dayım. Burada bir tesir çizgisi var.  $By=2450 \text{ kg}$  yukarı çık.  $-1736+2450=+714 \text{ kg}$  dayım. Kirişin sonuna doğru Metrede 500 inirsem 214 dayım. Burada bir tesir çizgisi var Aşağı  $P=214 \text{ kg}$  inirsem yatay çizgiye ulaşır ve grafiği kapatırım.

**MİSAL:** Aşağıdaki kirişin Kesit tesir diyagramları çizilmiş olup, boş bırakılan yerlere yazılması gereken değerleri hesaplayıp yazınız.



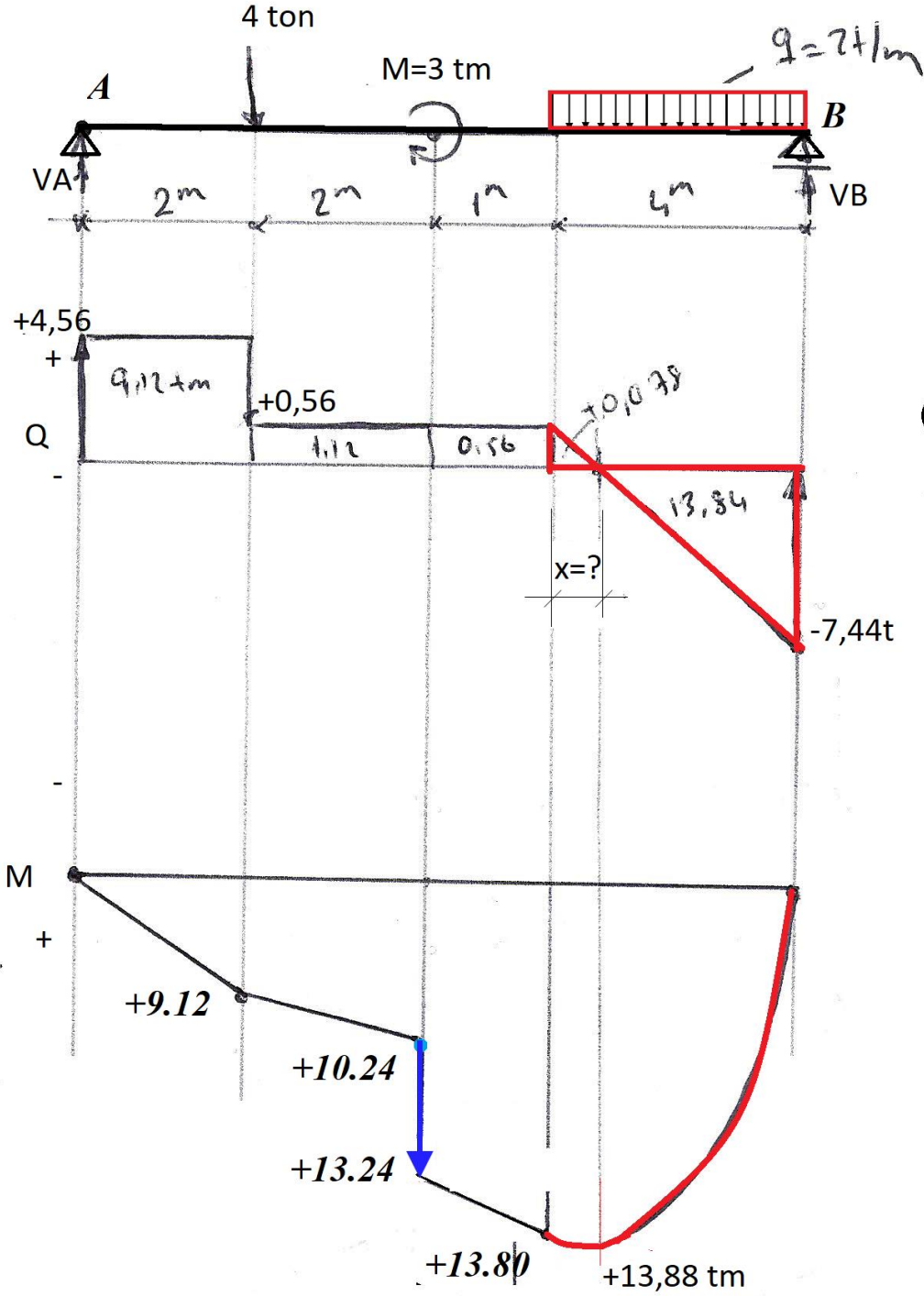
### MR Hesabı

$$A_y + B_y = 200 + 150 + (6 \times 300) = 2150 \text{ kg}$$

$$A_y = 1087.5 \text{ kg}$$

$$B_y = 1062.5 \text{ kg}$$

Misal:



$$\sum F_y = 0$$

$$V_A + V_B - 4 - (2 \times 4) = 0$$

$$V_A + V_B = 12 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$4 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 9V_B$$

$$V_B = 7,44 \text{ ton}$$

$$V_A = 12 - 7,44 = 4,56 \text{ ton}$$

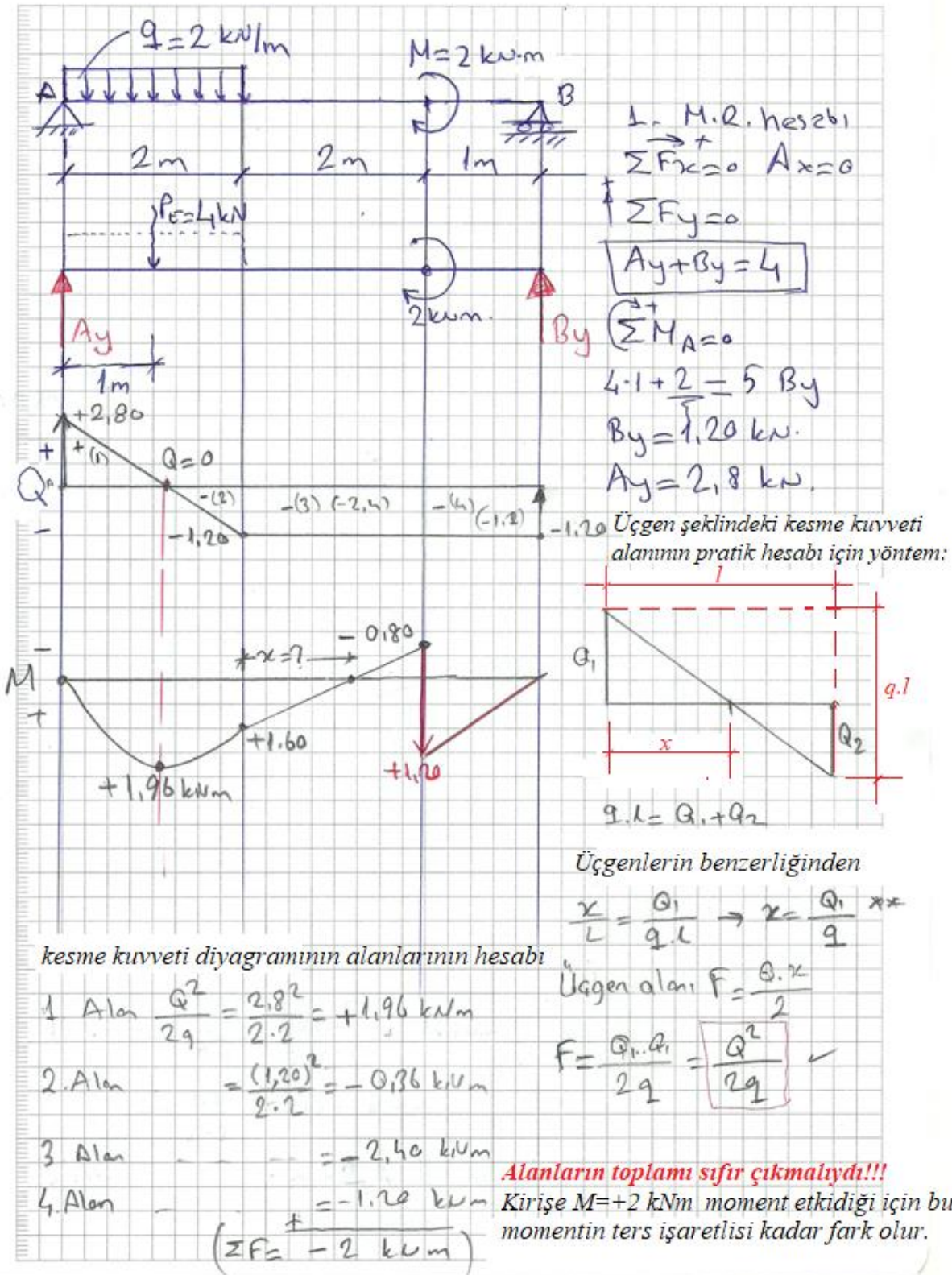
x=? Nasıl bulursunuz.

Kirişin moment diyagramı çizilirken nokta momente gelindiğinde momentin değeri kadar (+) ise aşağı, (-) ise yukarı çizilir.

$$\text{Üçgen alanı} = \frac{Q^2}{2 \cdot q} \text{ kN.m}$$

**Misal:** Verilen basit kirişin kesit tesir diyagramlarını çiziniz. Kiriş üzerine yayılı yüklerle birlikte  $M=2 \text{ kNm}$  lik bir nokta moment etki etmektedir.

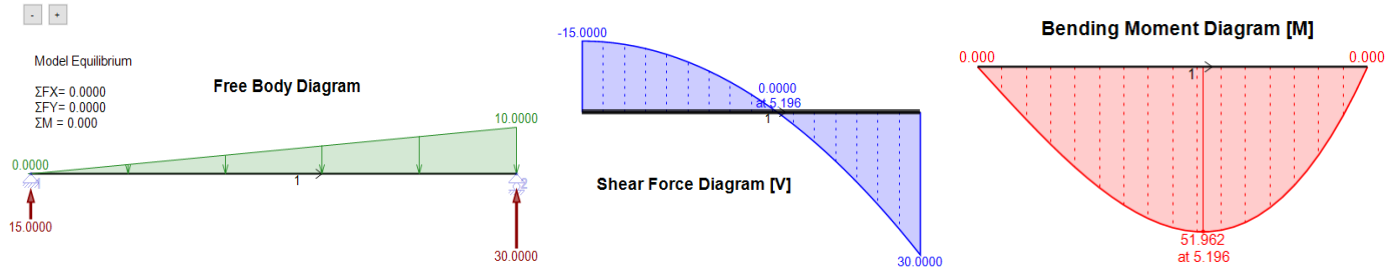
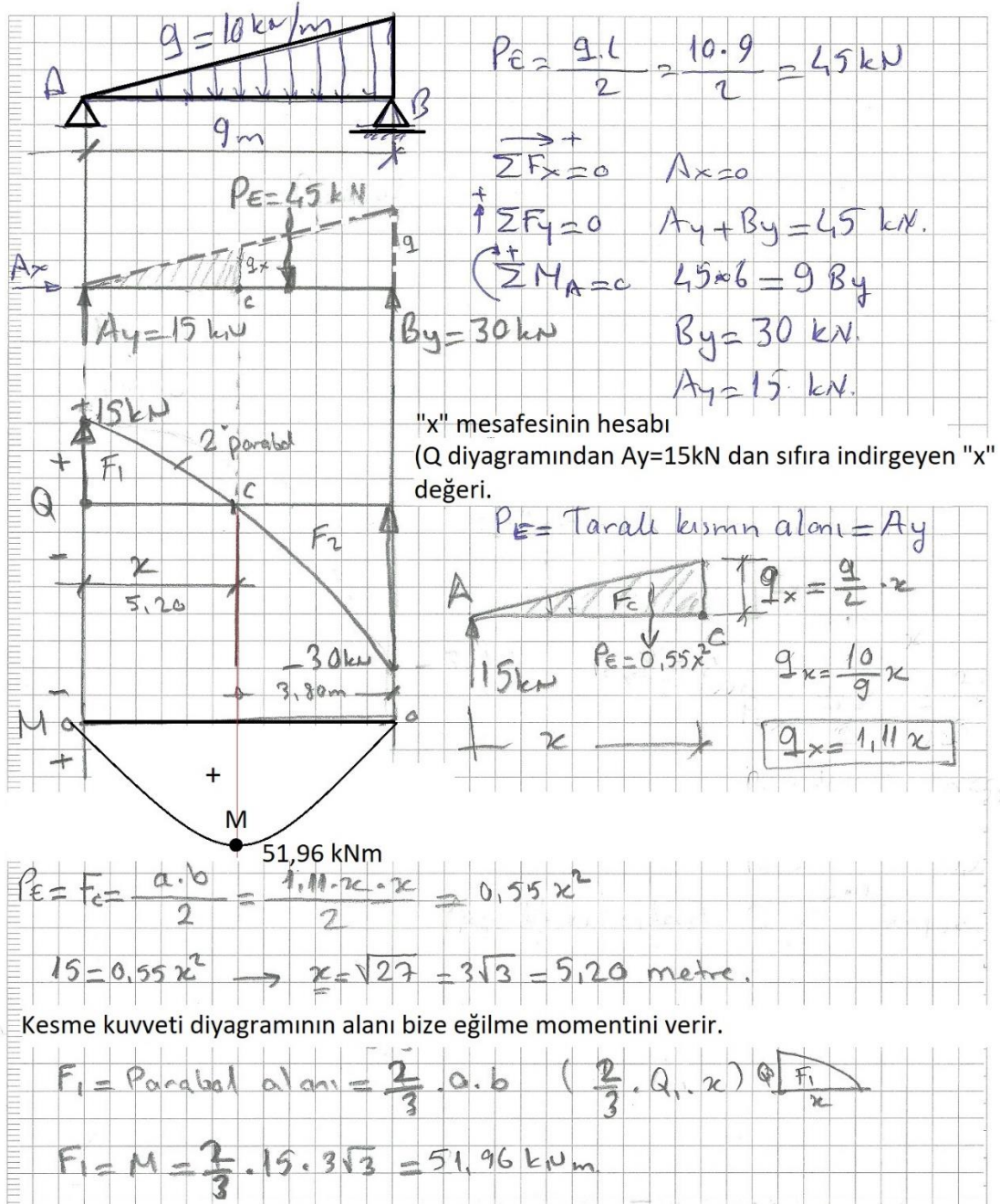
Kirişin moment diyagramı çizilirken nokta momente gelindiğinde momentin değeri kadar (+) ise aşağı, (-) ise yukarı zıplanır.



**NOT:** Açıklıkta eğilme momentinin sıfır olduğu "x" mesafesini hesaplayabilir misiniz?

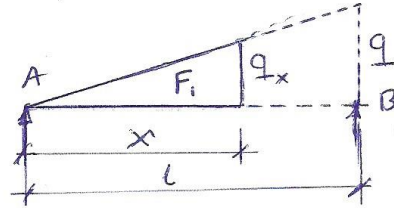
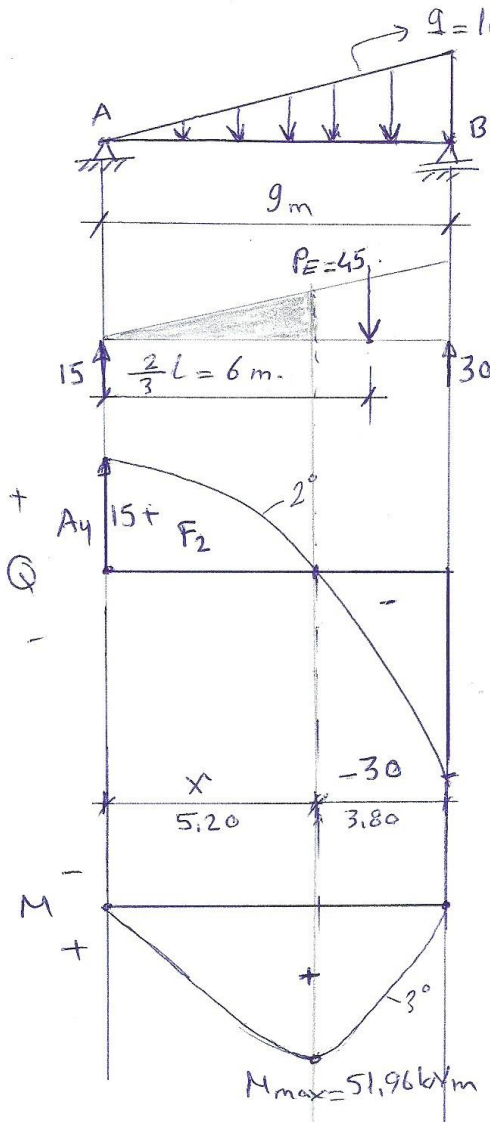
**Misal:**

Verilen üçgen yayılı yüklü basit kirişin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.

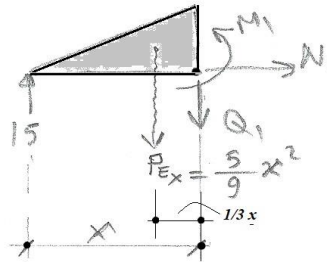


$$x = \frac{L}{\sqrt{3}} \text{ metre,} \quad M = \frac{q \cdot l^2}{15,6} \text{ kNm}$$

**Misal:** Bir önceki misalde verilen üçgen yaylı yüklü kirişin kesit tesir diyagramları kesim yöntemi uygulanarak çözülmüştür.



$$q_x = \frac{q}{L} \cdot x, \quad P_E = \frac{q \cdot L}{2}$$



$$P_{Ex} = \frac{q_x \cdot x}{2} = \frac{q}{L} \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{2} = \frac{q x^2}{2L}$$

$q = 10 \text{ kN/m}$   $L = 9 \text{ m}$  olduğundan

$$P_{Ex} = \frac{10 \cdot x^2}{2 \cdot 9} = \frac{5}{9} \cdot x^2$$

$A_y = 15 \text{ kN}$  ve  $B_y = 30 \text{ kN}$  bulunmuştur.

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad -Q_1 + 15 - P_{Ex} = 0$$

$$Q_1 = -\frac{5}{9} x^2 + 15 \quad \text{2. derece parabol.}$$

$$x = 0 \rightarrow Q_1 = 15 \text{ kN} \quad (A_y)$$

$$x = 9 \text{ m} \rightarrow Q = -30 \text{ kN} \quad (B_y)$$

$$Q_1 = 0 \rightarrow x = ?$$

$$0 = -\frac{5}{9} x^2 + 15 \rightarrow x = \sqrt{27} \rightarrow 3\sqrt{3} = 5,20 \text{ m}$$

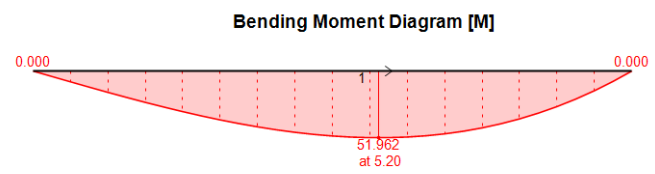
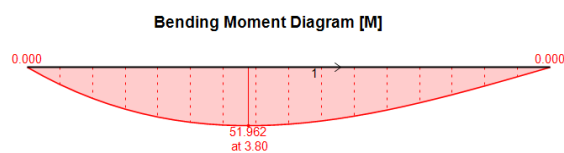
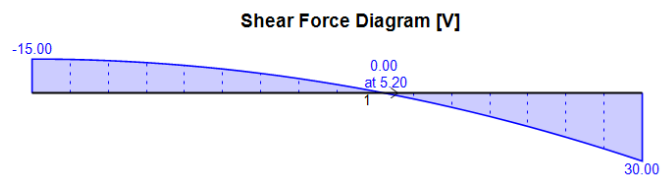
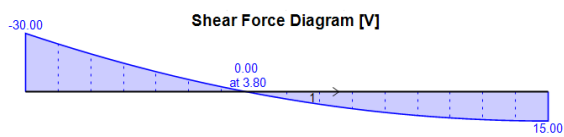
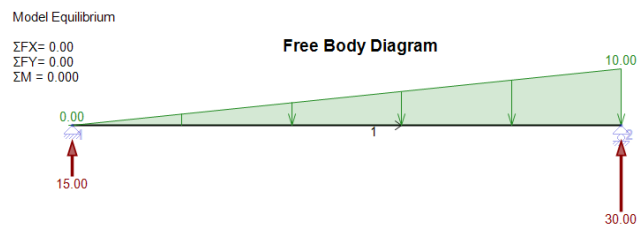
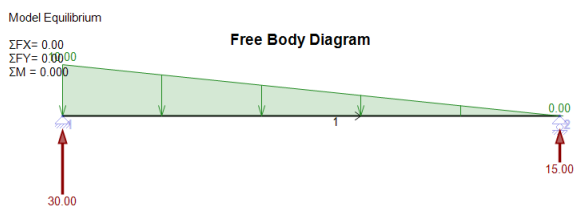
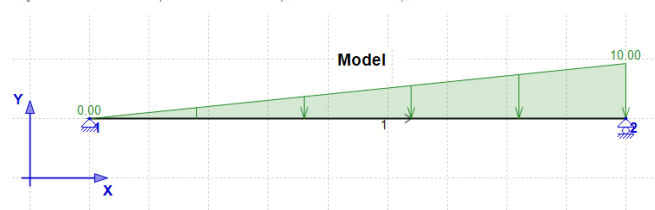
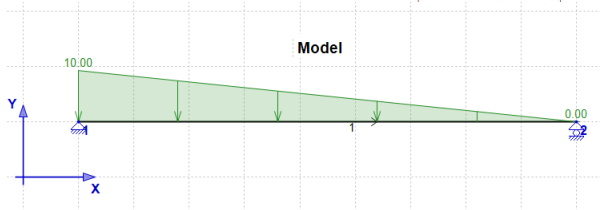
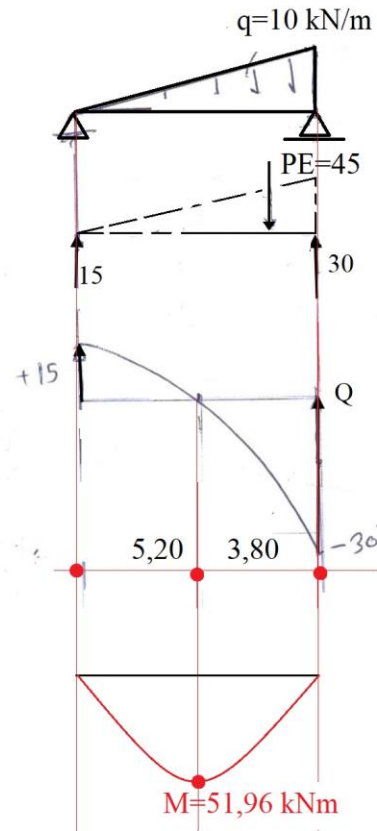
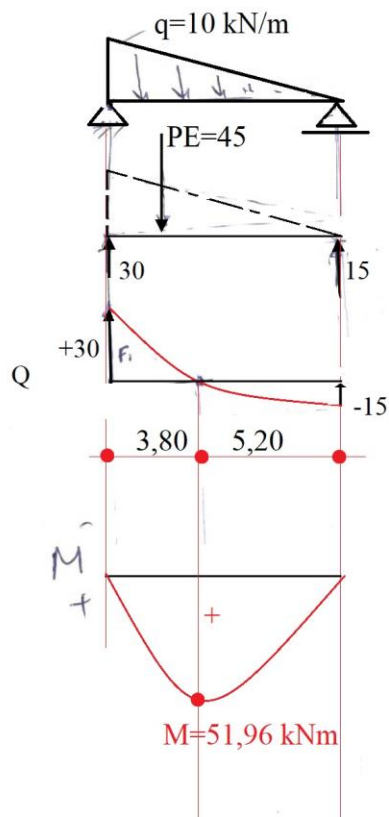
$$\left( \sum M_A = 0 \right) \quad -M_1 - P_{Ex} \cdot \frac{1}{3} x + 15 \cdot x = 0$$

$$-M_1 - \frac{5}{9} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} x + 15x = 0$$

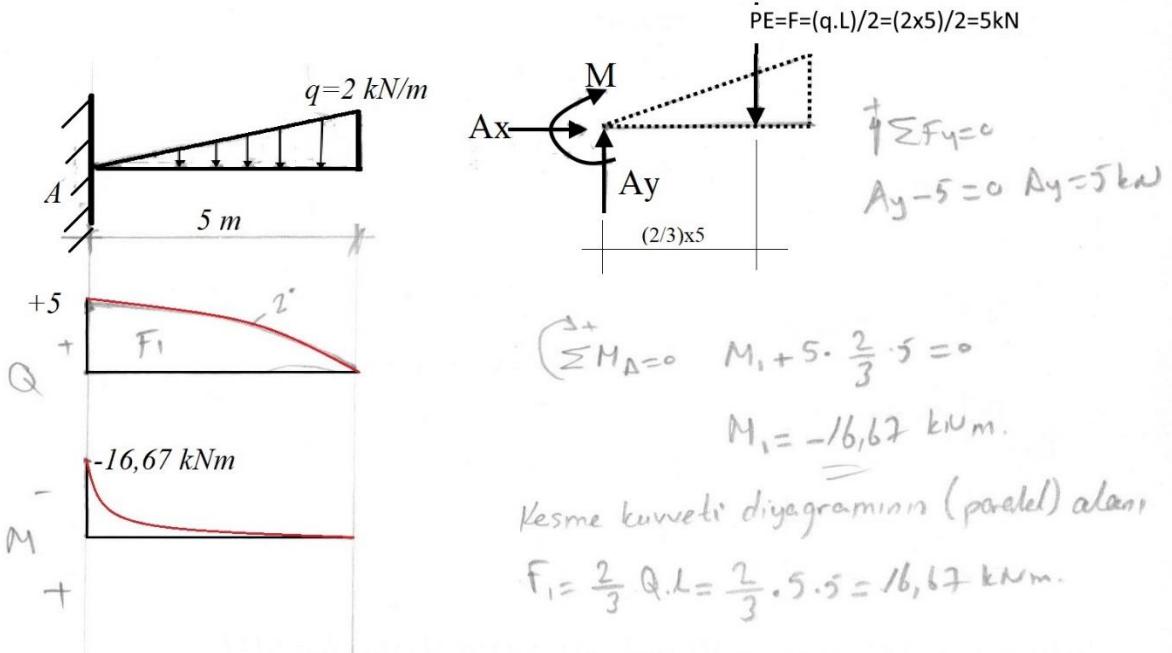
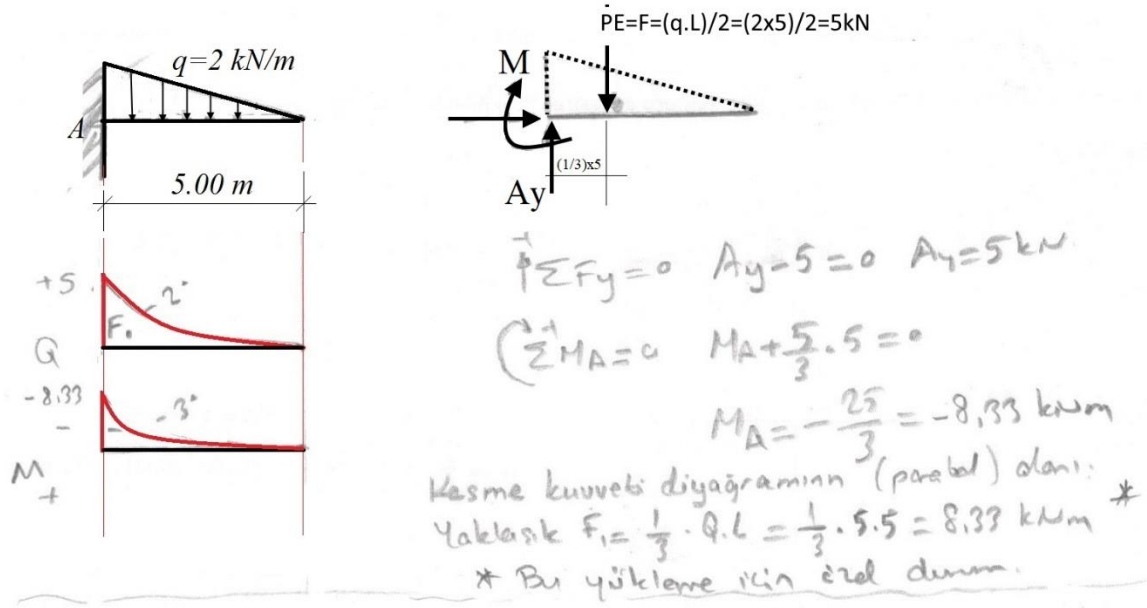
$$M_1 = -\frac{5}{27} x^3 + 15x \quad \text{3. derece parabol.}$$

$$x = 0 \rightarrow M_1 = 0$$

$$x = 5,20 \rightarrow M_1 = M_{\max} = 51,96 \text{ kNm.}$$



**Misal:** Şekilde üçgen yaylı yüklü konsol (çıkmalı) kirişin iki farklı yükleme hali verilmiştir. Kesit tesir diyagramlarının çizimi isteniyor.



### İZOSTATİK ÇERÇEVELERİN KESİT TESİR DİYAĞRAMLARININ ÇİZİLMESİ

Çerçeveler, bir doğru üzerinde bulunmayan birden fazla doğru eksenli çubuğa sahip sistemlerdir. Genellikle çerçeveyi oluşturan yatay, düşey ve eğik elemanlara çubuk denilir. Çubukların birleştiği yerlere düğüm noktası denilir. Çerçevelerin kesit tesir diyagramları basit kirişlerin kesit diyagramları çizilirken uygulanan kurallarla çizilir.

Çerçevelerin kesit tesirleri hesaplanırken,

1-Çerçeve çizilir ve mesnet reaksiyonları hesaplanır.

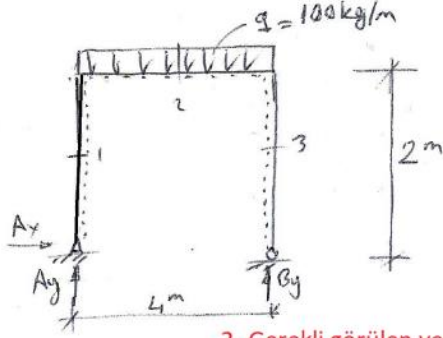
2-Kritik noktalardan kesimler yapılarak kesit tesirleri fonksiyonları (denklemleri) çıkarılır.

3-Bu denklemlerden faydalanarak kesit tesirleri çizilmek istenen kısmın sınır değerleri denkleme konularak kesit tesiri hesaplanır ve çizilir.

4-Her kesit tesiri için çerçevenin modeli çizilir ve bu model üzerinde işaretlemeler yapılır. İşaret kuralı daha önce tek açıklıklı basit kirişlerde anlatıldığı gibidir (Şekil 6).

Misal: Aşağıdaki şekilde izostatik basit çerçeve görülmektedir. Bu çerçevenin verilen yük ve ölçülere göre kesit tesir diyagramlarını çiziniz.

Çerçevenin N,Q,M diyagramları çizilirken kesim ve dağıcılık (alan) yöntemi birlikte kullanılacaktır.)

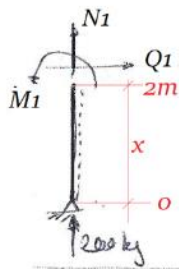


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow Ax = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow Ay + By = 100 \cdot 4 \\ Ay + By &= 400 \text{ kg} \\ Ay = By &= 200 \text{ kg} \end{aligned}$$

1-Önce mesnet reaksiyonları hesaplanır.

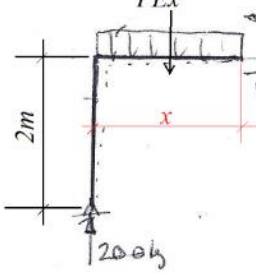
2- Gerekli görülen yerlerden kesit alınır. Denklemler çıkarılır.

1-1 kesimi



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow Q1 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow N1 + 200 = 0 \\ N1 &= -200 \text{ kg} \downarrow \text{ (basınç)} \\ \sum M_1 = M_1 &= 0 \end{aligned}$$

2-2 Kesimi

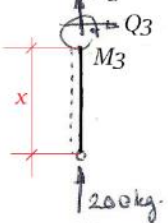


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow N2 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow Q2 - 200 + 100x = 0 \\ Q2 &= 200 - 100x \\ x=0 &\Rightarrow Q2 = 200 \text{ kg} \\ x=4 &\Rightarrow Q2 = -200 \text{ kg} \\ 0 &= 200 - 100x \\ x &= 2 \text{ m bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_2 = M_2 + 100 \frac{x^2}{2} - 200x &= 0 \\ M_2 &= -\frac{100x^2}{2} + 200x \\ M_2 &= -50x^2 + 200x \\ x=0 &\Rightarrow M_2 = 0 \\ x=4 &\Rightarrow M_2 = 0 \\ x=2 &\Rightarrow M_2 = 200 \end{aligned}$$

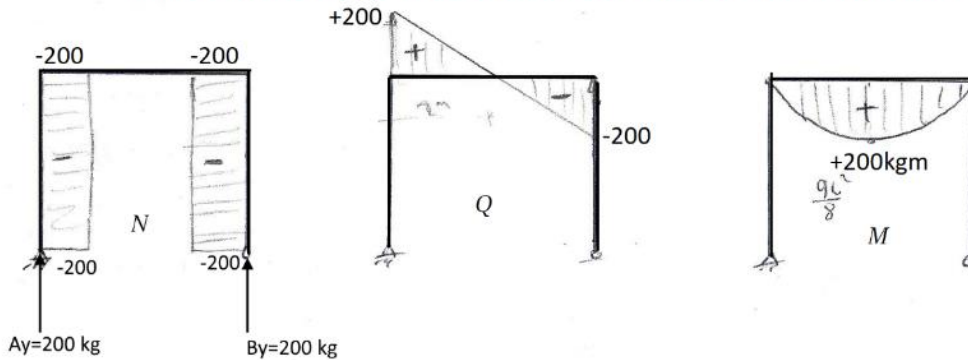
En büyük açıklık momenti açıklık ortasında  $x=L/2$  de oluşur.

3. Kesim



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow Q3 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow N3 + 200 = 0 \\ N3 &= -200 \text{ kg} \\ \sum M_3 = 0 \end{aligned}$$

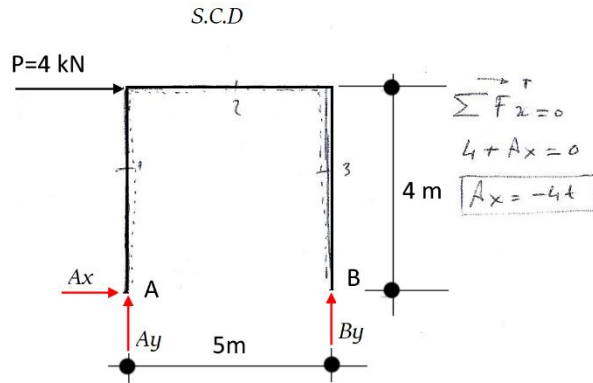
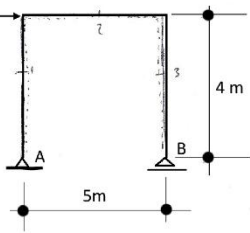
3- Elde edilen denklemlerde x'e değer verilerk "y" yani NQM bulunur ve çizilir.



Misal:

Verilen basit çerçevenin kesit tesir diyagramlarının çizimi isteniyor.

P=4 kN

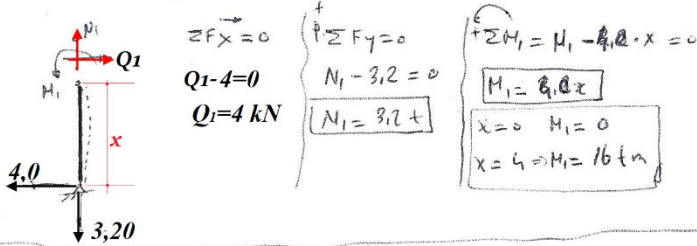


$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ 4 + A_x &= 0 \\ A_x &= -4 \text{ t} \end{aligned}$$

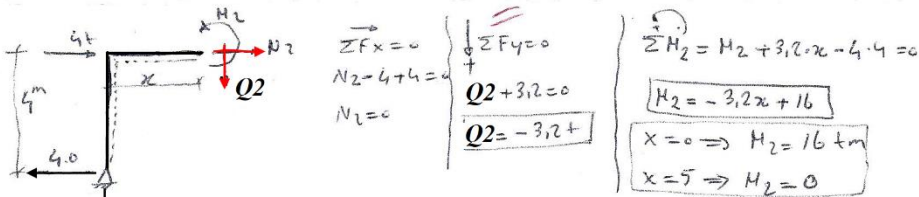
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ A_y + B_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ B_y \cdot 5 - 4 \cdot 4 &= 0 \\ B_y &= \frac{16}{5} = 3,2 \text{ t} \\ A_y &= -3,2 \text{ t} \end{aligned}$$

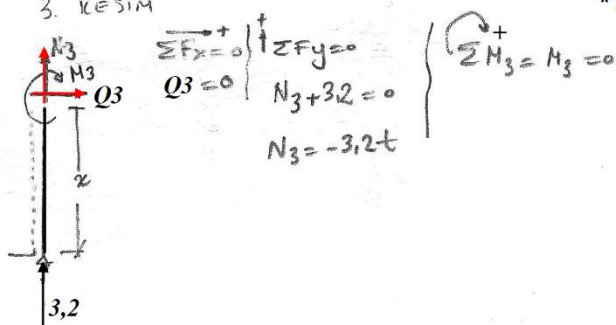
1. KESİM



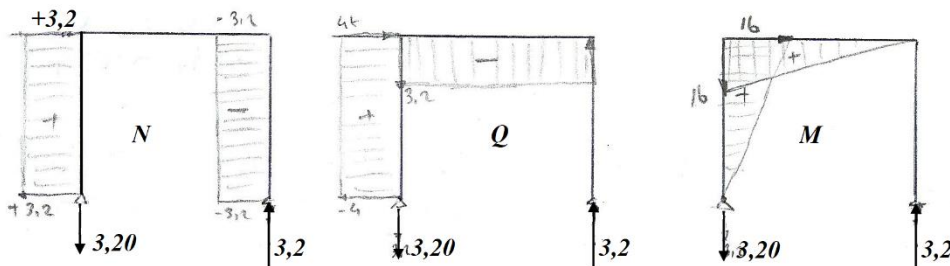
2. KESİM



3. KESİM

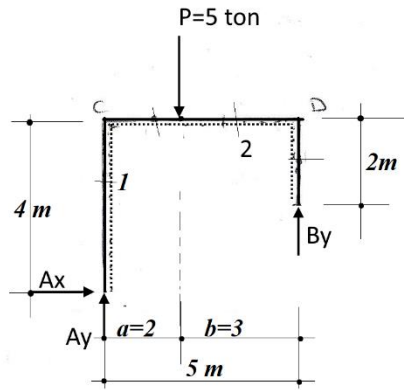
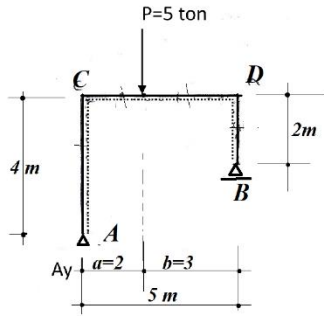


\* bakış yönü



**Misal:**

Verilen izostatik basit çerçevenin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 5t$$

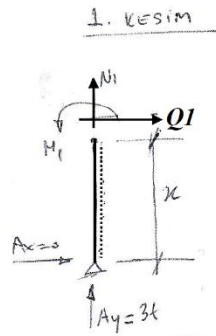
$$\sum M_A = 0$$

$$-5 \cdot 2 + 5 B_y = 0$$

$$B_y = 2 \text{ ton}$$

$$A_y = 3 \text{ ton}$$

3. ve 4. kesim istenirse yapılabilir.



$$\sum F_x = 0$$

$$Q1 + A_x = 0$$

$$Q1 = -A_x = 0$$

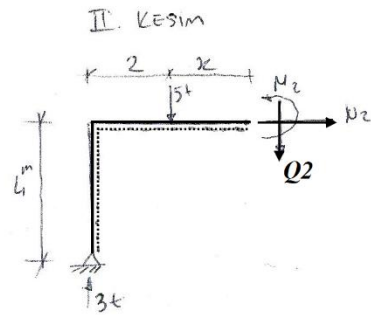
$$\sum F_y = 0$$

$$N1 + 3 = 0$$

$$N1 = -3$$

$$\sum M_1 = M_1 = 0$$

$$M_1 = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

$$N2 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-3 + Q2 + 5 = 0$$

$$Q2 = -2t$$

$$\sum M_2 = M_2 + 5 \cdot x - 3 \cdot (2+x) = 0$$

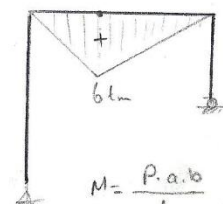
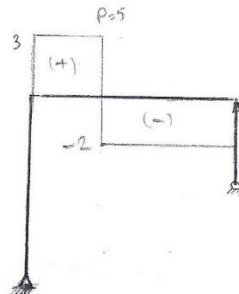
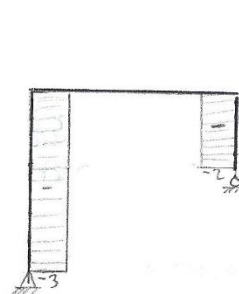
$$M_2 + 5x - 6 - 3x = 0$$

$$M_2 = -5x + 6 + 3x$$

$$M_2 = -2x + 6$$

$$x=0 \Rightarrow M_2 = +6$$

$$x=3 \Rightarrow M_2 = 0$$

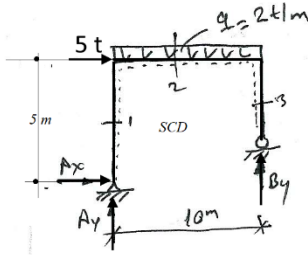
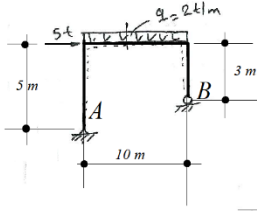


$$M = \frac{P \cdot a \cdot b}{L}$$

$$M = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{5} = 6,0 \text{ tm}$$

**Misal:**

Verilen izostatik çerçevenin kesit tesir diyagramlarının çizimi.

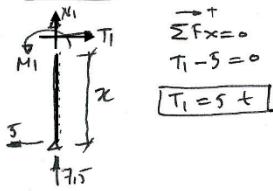


$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ Ax + 5 &= 0 \\ Ax &= -5t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ Ay + By &= 2 \cdot 10 \\ Ay + By &= 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ +5 \cdot 5 + 2 \cdot 10 \cdot 5 &= 10 By \\ By &= 12.5t \\ Ay &= 7.5t \end{aligned}$$

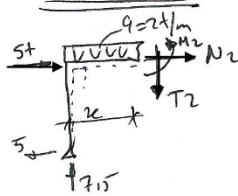
Q=T=Kesme kuvveti bazı kaynaklarda T ile gösterilir.

**1. KESİM**

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ T_1 - 5 &= 0 \\ T_1 &= 5t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ N_1 + 7.5 &= 0 \\ N_1 &= -7.5t \end{aligned}$$

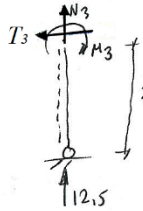
$$\begin{aligned} \sum M_1 &= M_1 - 5 \cdot x = 0 \\ M_1 &= 5x \\ x=0 \quad M_1 &= 0 \\ x=5 \quad M_1 &= 25tm \end{aligned}$$

**2. KESİM**

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ N_2 + 5 \cdot 5 &= 0 \\ N_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ T_2 - 7.5 + 2 \cdot x &= 0 \\ T_2 &= 7.5 - 2x \\ x=0 \Rightarrow T_2 &= 7.5t \\ x=10 \Rightarrow T_2 &= -12.5t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= -7.5x - 5 \cdot 5 + \frac{2x^2}{2} + M_2 \\ M_2 &= 7.5x + 25 - \frac{2x^2}{2} \\ M_2 &= 7.5x + 25 - x^2 \\ x=0 \Rightarrow M_2 &= +25 \\ x=10 \Rightarrow M_2 &= 0 \end{aligned}$$

**3. KESİM**

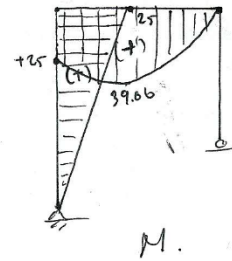
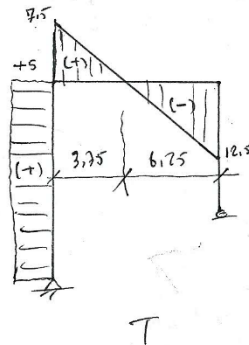
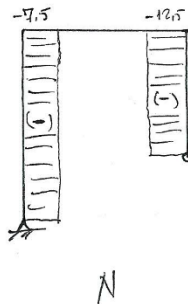
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ T_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ N_3 + 12.5 &= 0 \\ N_3 &= -12.5t \end{aligned}$$

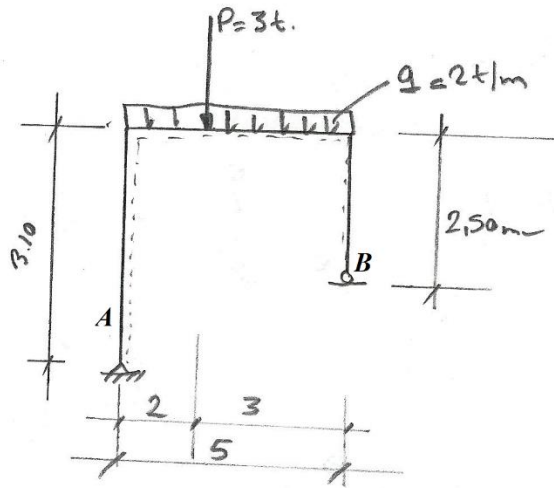
$$\sum M_3 = M_3 = 0$$

maks. Ağırlık momenti

$0 = -x^2 + 7.5x + 25$  denkleminin köklerinin bulunmasıyla 2 alabileceği gibi, grafik üzerinde bulunabilir.



**Misal:** Verilen çerçevenin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.



$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 13t$$

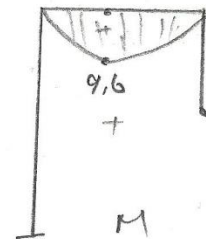
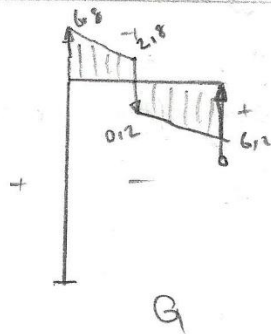
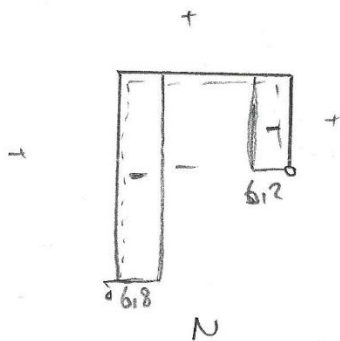
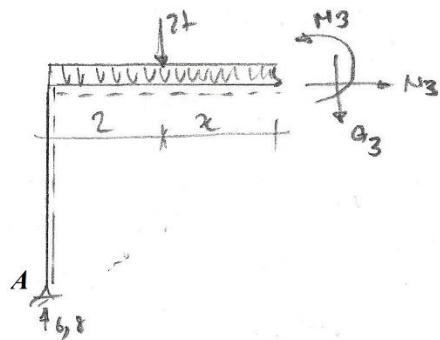
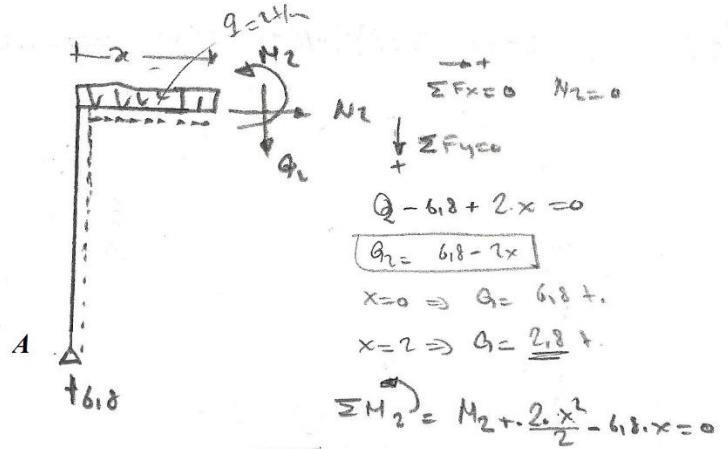
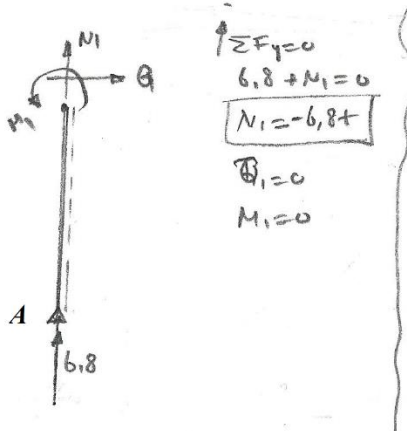
$$\sum M_A = 0$$

$$B_y = 6.2t \quad \nabla$$

$$A_y = 6.8t \quad \nabla$$

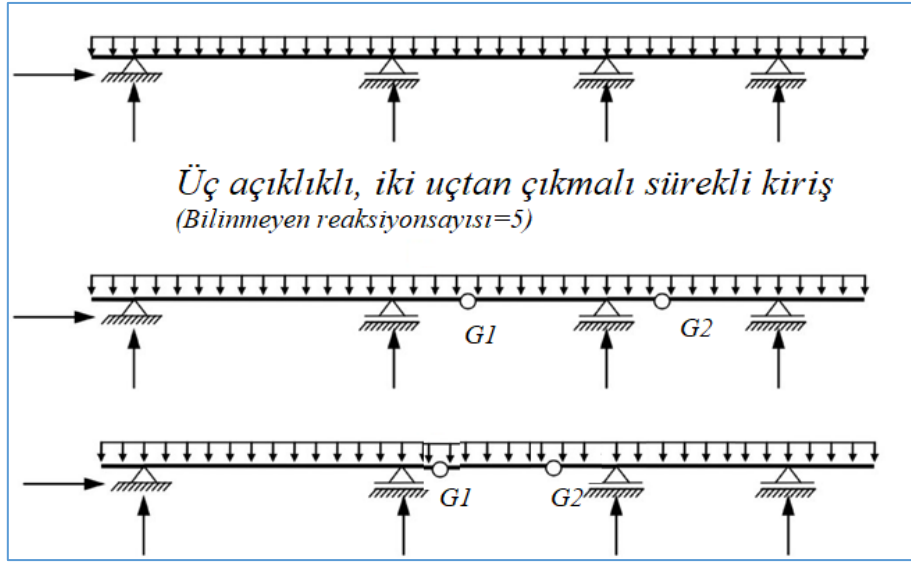
$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} + \frac{P \cdot a \cdot b}{L}$$

$$M = 7.85 \text{ t.m.}$$

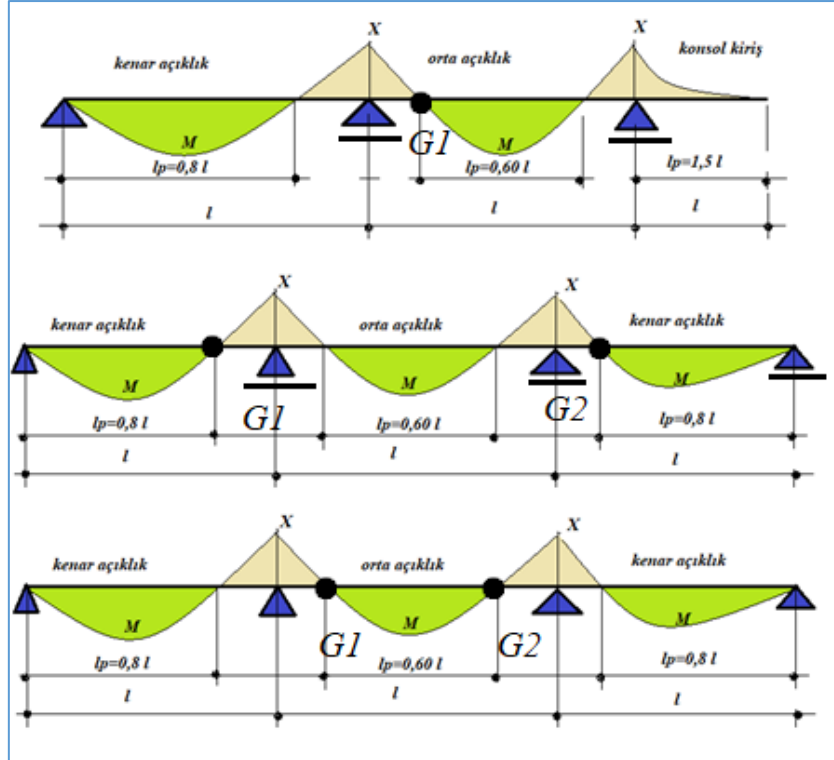


## 2-GERBER KİRİŞLER

Birden fazla açıklığa sahip sürekli kirişlere fazla ara mesnet sayısı kadar mafsall eklenmesiyle elde edilen İzostatik sistemlere Gerber kirişler denilir. Mafsalların yerleştirilmesi rast gele olmayıp, teorik moment sıfır noktalarına yakın bölgelere konulur.



Şekil 9



Şekil 10: Sürekli kirişlerde teorik moment sıfır noktaları

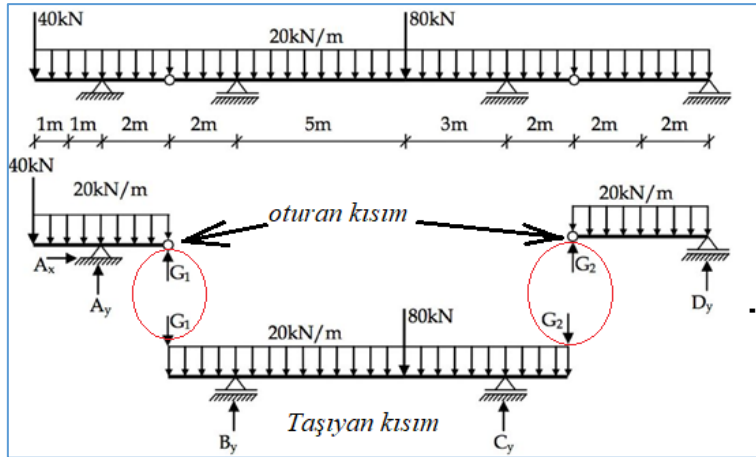
Birden fazla açıklığa sahip, bir ucu sabit veya ankastre, diğer ara mesnetleri hareketli olan doğru eksenli çubuklardan oluşan düzlem sistemlere “Sürekli Kiriş” denir.

Sürekli kirişin mesnet reaksiyonları sayısı denge denklemi sayısı olan 3 den fazla olduğu durumlarda hiperstatiklik sözü konusu olur. Bu tür kirişlere bilinmeyen fazla reaksiyon sayısı kadar (fazla ara mesnet sayısı da olur) mafsall eklenir.

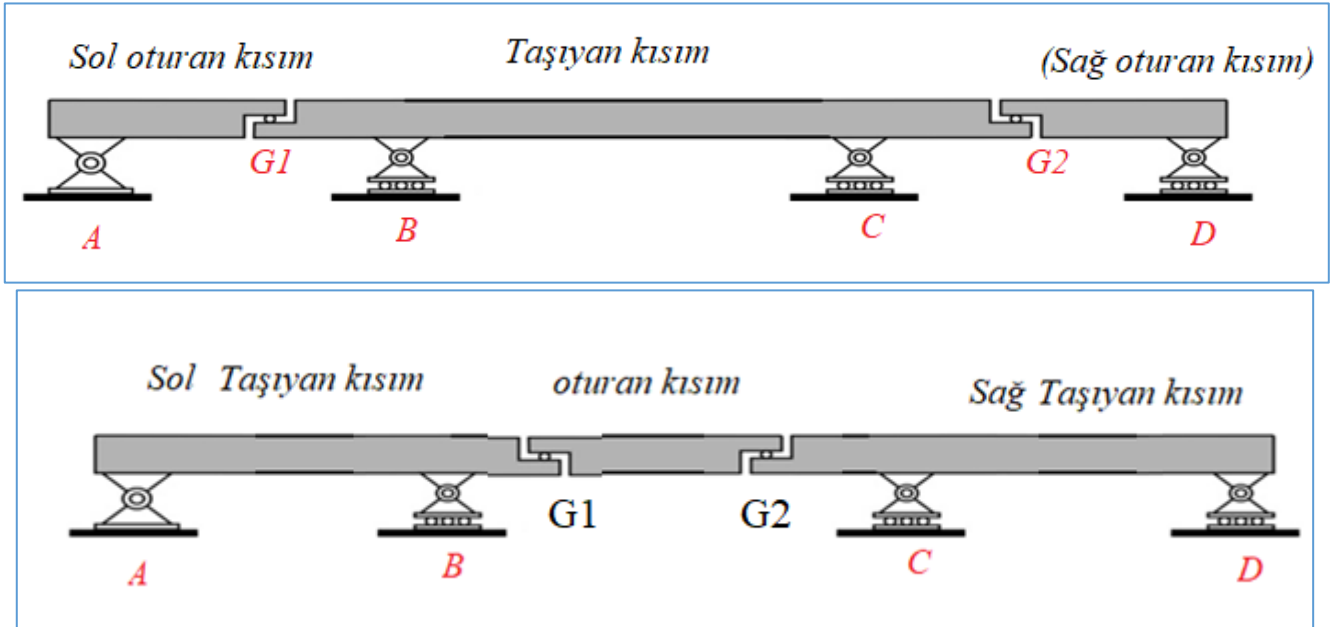
Sürekli kirişin bir ucunda ki mesnet türü şayet ankastre ise bu sistem türünde  $n+3$  tane bilinmeyen vardır demektir bu sistemde aynı şekilde 3 denge denklemi ile çözülebildiğinden dolayı  $n$ . dereceden hiperstatik denir. Bu uygulamadaki amaç, kiriş üzerinde uygun yerlere mafsallar ekleyip kirişi hiperstatiklikten kurtarıp izostatik hale getirmektir.

Mafsalların konulduğu yerlerde eğilme momenti sıfırdır. Mafsallar yerleştirilirken bölünen her sistemin dengede olmasına dikkat edilir. Gerber kirişler mafsallarından ayrılarak taşıyan kısım ve oturan kısım olmak üzere iki şekilde isimlendirilir.

Gerber kirişlerin kesit tesir diyagramlarının çizimi ve hesabı tek açıklıklı basit kirişlerin çizim yöntemiyle aynıdır. Çünkü mafsallı eklemek suretiyle birden fazla İzostatik basit kiriş elde edilmiştir. Önce oturan kısmın mesnet reaksiyonları hesaplanır. Hesaplanan reaksiyonlardan birisi “ $G_1$ ” mafsallı kuvveti olduğu için bunun değeri taşıyan kısma ters yönde kuvvet olarak etki ettirilir. Oturan kısmın mafsallı kuvveti yukarı doğru, taşıyan kısımda değme noktasında eşit ve zıt yönlü olur (Şekil 11).



Şekil 11

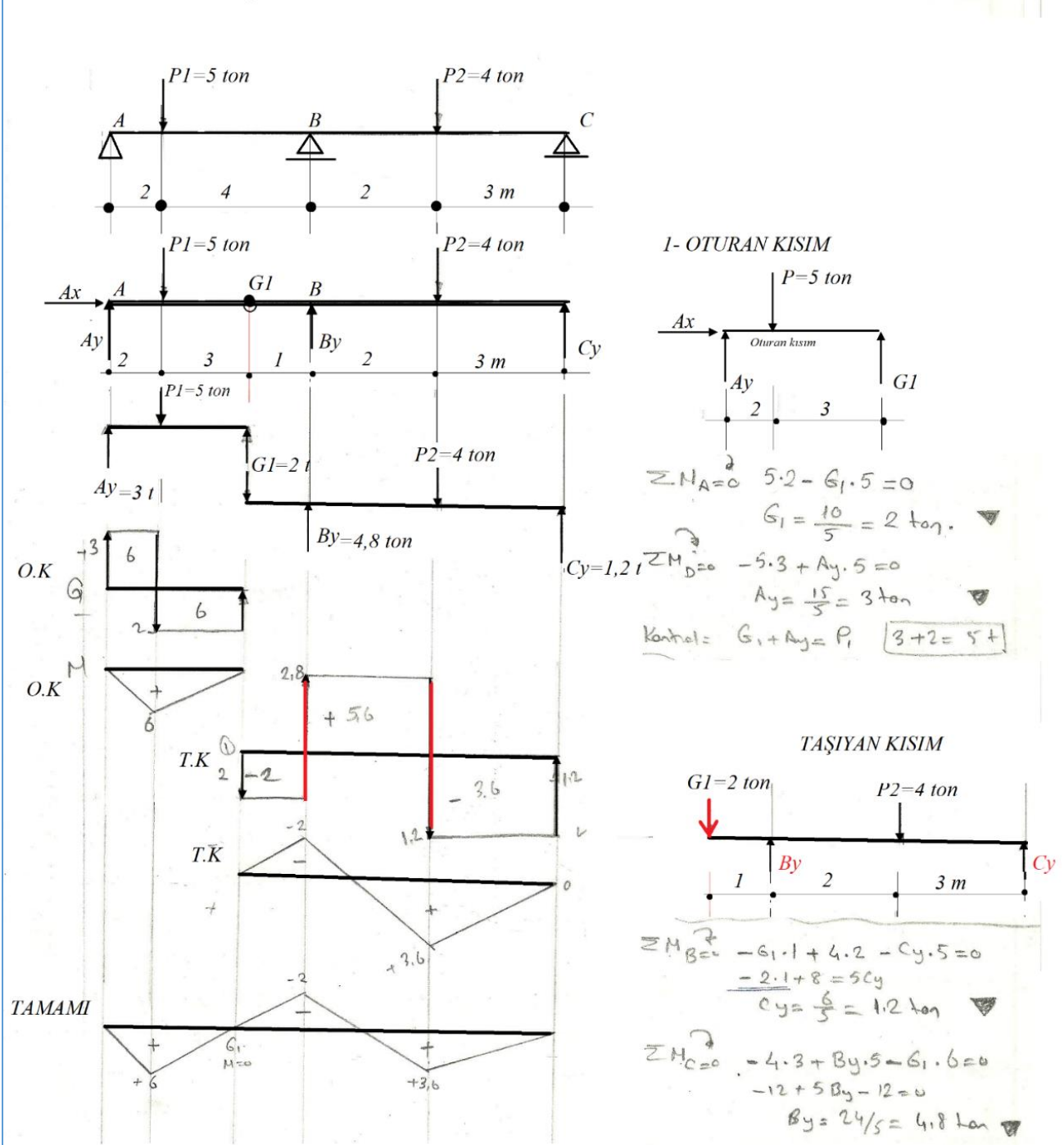


Şekil 12: Mafsalın farklı yerleştirilmeleri

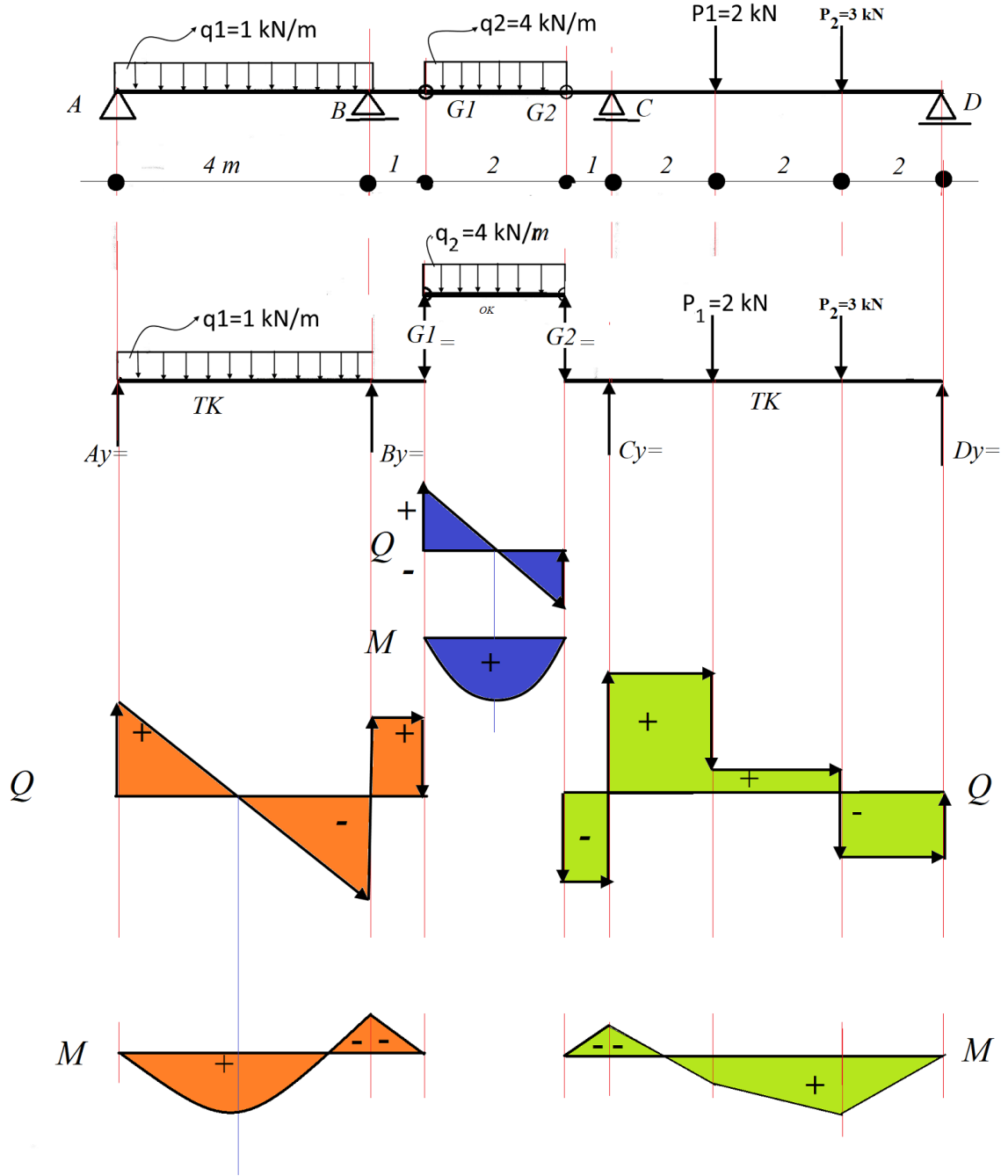
**Misal:**

Verilen iki açıklıklı sürekli kirişin birinci açıklığına mafsallı eklenerek Gerber kiriş elde edilmiştir. Verilen gerber kirişin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.

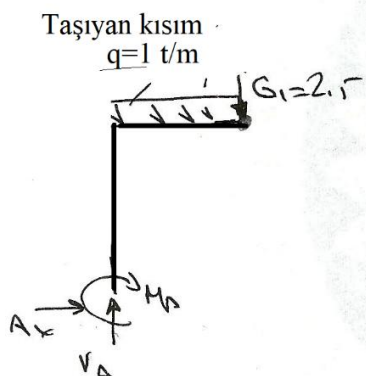
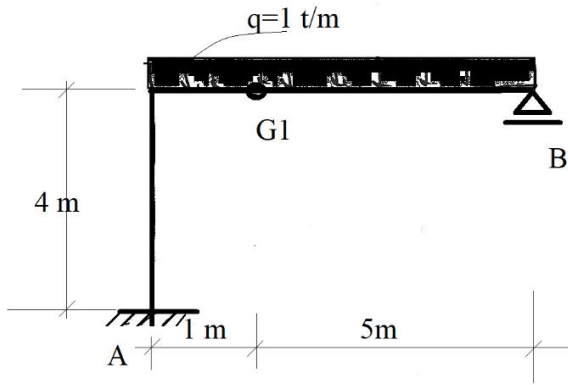
**Çözüm:** İki açıklıklı bu kirişte birisi sabit diğer ikisi hareketli olan üç mesnet ve dört reaksiyon yani bilinmeyen (m) bulunmaktadır. Denge denklemi sayısı (n) üç tanedir.  $m-n=0$  statikçe belirlilik şartıdır. Yani izostatiktir deriz ve mesnet reaksiyonları üç denge denklemi ile hesaplanabilir. Fakat bu ilk örnekte  $m-n=4-3=1$  olmaktadır. Yani sistem 1. Derece hiperstatiktir ve bu kirişi çözmek için fazladan bir mafsallı eklememiz gerektiği anlamı çıkıyor. Mafsallı ilk A;B açıklığına Şekil 9-10 daki kurala göre ekledik. Böylece A;G1 ve G1;C arası olmak üzere iki adet basit kiriş elde edilmiş oldu. Önce A;G1 arası oturan kiriş olarak adlandırılır ve bu iki ucu basit mesnetli kirişin Ay ve G1 mesnet reaksiyonları hesaplanır.



Verilen gerber kirişin mesnet reaksiyonlarını hesaplayıp çizilmiş diyagramlar üzerinde değerleri gösteriniz.



Misal: Verilen gerber sistem çerçevesinin NQM diyagramlarını çiziniz.



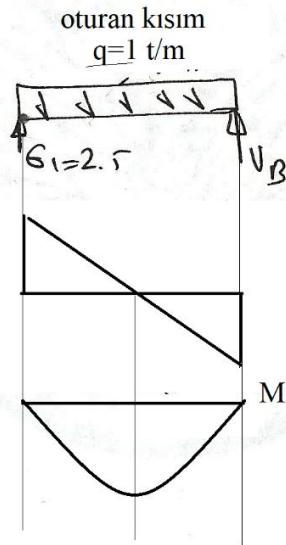
$$\sum F_y = 0 \quad V_A = 1 \times 1 + 2.5$$

$$V_A = 3.5 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A + 1 \times 1 \times 0.5 + 2.5 \times 1 = 0$$

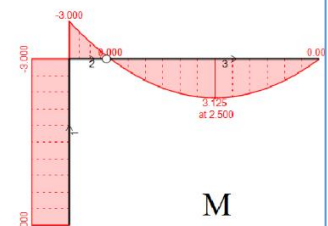
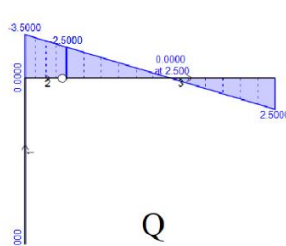
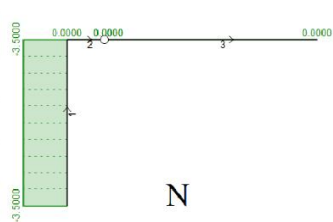
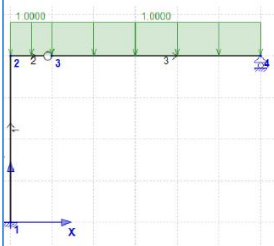
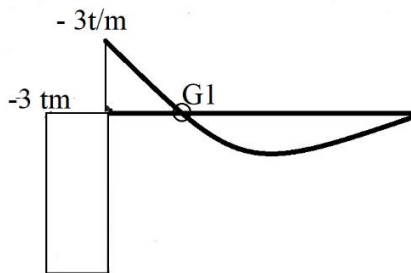
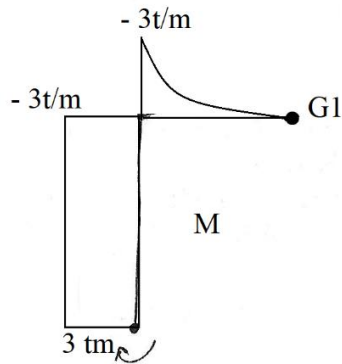
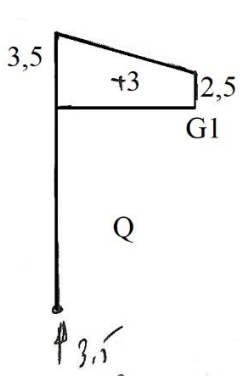
$$M_A = -3 \text{ tm}$$

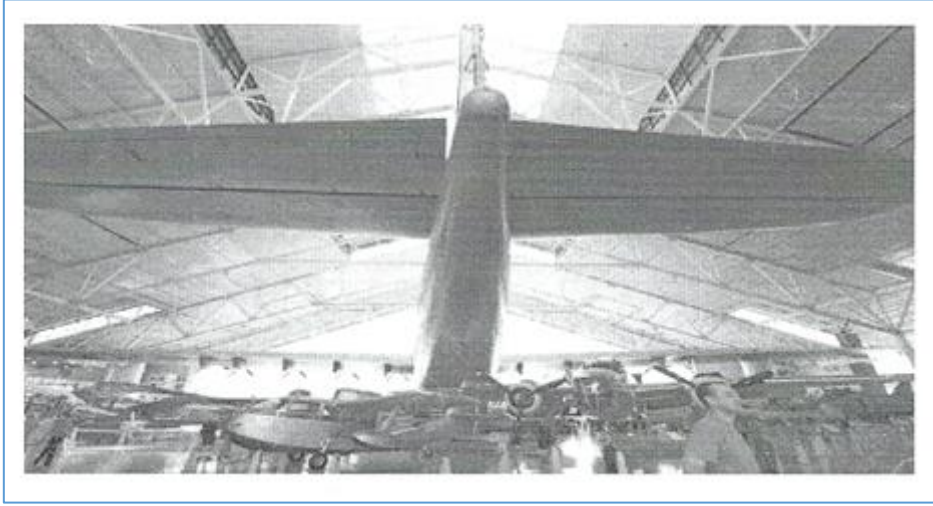


$$\sum F_y = 0$$

$$G_1 + V_B = 1 \times 5$$

$$G_1 = V_B = 2.5 \text{ t}$$

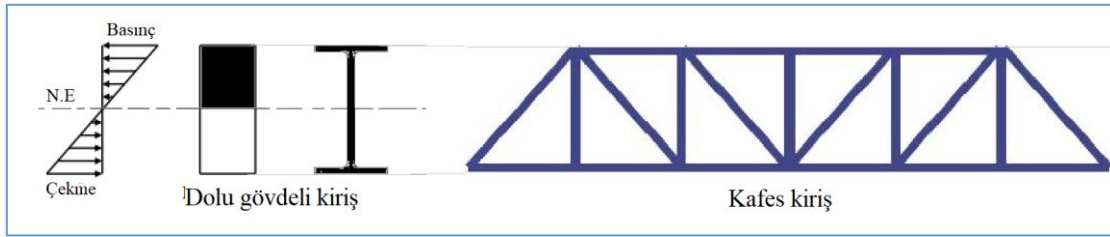




### 3-KAFES KİRİŞLER

Kafes kirişler, dolu gövdeli ahşap ya da betonarme kirişlerden farklı olarak, gövdeleri genellikle üçgen bazen eşkenar dörtgen şeklinde boşlukları olan sadece çubuk şeklinde başlık, alt başlık ve örgü çubukları bulunan taşıyıcı sistemler olarak tarif edilir.

Betonarme veya çelik dolu gövdeli taşıyıcı sistemlerin açıklıkları büyüdükçe kendi ağırlıkları artar. Bu yüzden uzun açıklıkların geçilmesinde ekonomik olmamaya başlar. Bunların yerine açıklıkları geçmek için kafes kiriş tasarlamak daha ekonomik ve güvenli olmaktadır.



Şekilde dolu gövdeli bir kirişin en kesitinde basit eğilme halinde normal gerilme dağılımı görülmektedir. Tarafsız eksenenden uzaklaştıkça, alt ve üst kenarlardaki liflerde gerilmeler en büyük değere ulaşmakta yani dolu kesitin bu kısımlarda taşıyıcılık özelliği artmaktadır. Bunun aksine tarafsız eksene yaklaştıkça gerilmelerin azaldığı ve kirişin bu bölgede taşıyıcılık özelliğinin de azaldığını ve buradaki kesitin tamamının yük aktarmaya etkisinin az olduğu görülmektedir. Kiriş ağırlığını azaltmak için tarafsız eksene yakın orta bölgenin bir kısmı sistemden çıkarılarak daha çok I kesite yakın dolu sistemler elde edilebilir. Daha büyük açıklıklarda ise orta kısım tamamıyla kaldırılıp, bunun yerine kesme kuvvetlerini karşılamak üzere çubuklar konarak “kafes sistemler” elde edilir. Kafes sistemler, sadece normal kuvvet taşıyan doğru eksenli çubukların birleşmesinden meydana gelirler. Çubukların birleşim yerlerine “düğüm noktaları” denir.

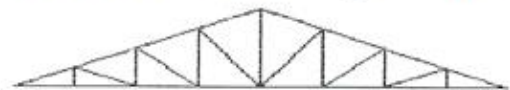
Kafes sistemler, yapı taşıyıcı sistemlerinin en önemlilerinden birisidir. Özellikle köprü ve çatılar başta olmak üzere birçok mühendislik yapısında pratik ve ekonomik çözümler sunar. Bir kafes kiriş düğüm noktalarında birleşen doğru eksenli sabit enkesitli rijit çubuklardan oluşturulur. Bütün çubuklar eksenel kuvvet etkisi altında olup, ya çekme (+) ya da basınç (-) çubuğu olurlar. Yükleme durumu ve kafes kirişin geometrisine göre bazı özel durumlarda da ‘sıfır’ yük alırlar. Bu çubuk kuvvetleri düğüm noktalarında dengede olurlar.

Çelik kafes kirişler düğüm noktalarında bağ levhası aracılığıyla perçin, bulon veya kaynak ile birleştirilerek yüklerini düğüm noktalarına aktarırlar.

## UYGULAMADA EKONOMİK ÇÖZÜMLER SUNAN KAFES KİRİŞ TİPLERİ



SCISSORS



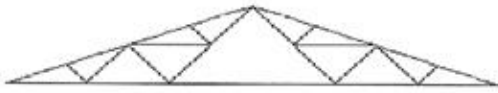
HOWE



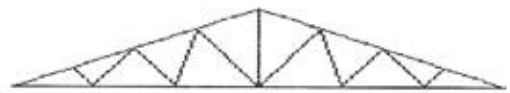
FAN



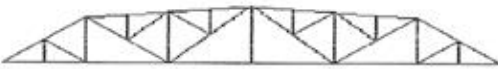
PRATT



FINK



BELGIAN



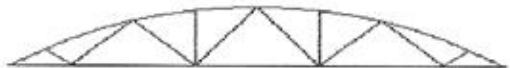
MANSARD



BOWSTRING



PARKER



BOWSTRING



PETIT



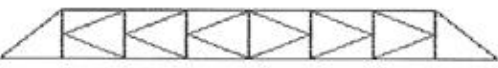
LENTICULAR



WARREN



HOWE



K



PRATT

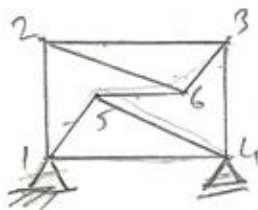


BALTIMORE



VIERENDEEL

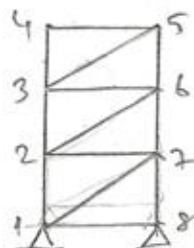
### ÖZEL TİP KAFES KİRİŞLER



$$J=6$$

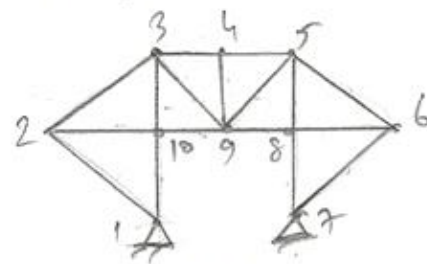
$$m=9 \checkmark$$

$$m+3=2J$$



$$J=8$$

$$m=13 \checkmark$$



$$J=10$$

$$m=17 \checkmark$$

## KAFES KİRİŞ TASARIMINDA KABULLER

1-Kafes kirişi oluşturan bütün çubukların boy eksenleri bir düzlem üzerinde bulunmalıdır. Dış kuvvetler de bu düzlem içerisinde tesir eder.

2-Kafes kirişi oluşturan çubukların boy eksenleri bir noktada kesişmelidir. Bu noktaya düğüm noktası (DN) adı verilir. Çubuk kuvvetlerinin bu noktada dengede olduğu kabul edilir. ( $\sum Fx^{\rightarrow} = 0$  ve  $\sum Fy^{\rightarrow} = 0$ )

3-Kafes kirişin düğüm noktaları sürtünmesiz mafsallı olarak kabul edilir. (Perçin, bulon ve kaynaklı birleşimler)

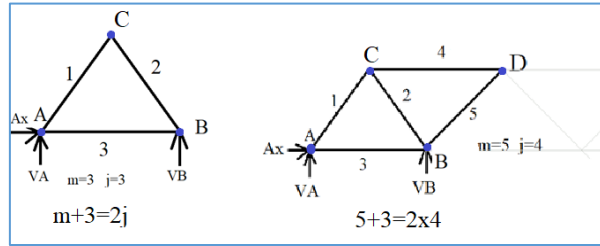
4-Dış yüklerin (sabit ve hareketli yükler) kafes kirişin sadece düğüm noktalarına etki ettiği varsayılır. Çubuk boy eksenine dik kuvvet etki ettirilmez.

5-İzostatik bir kafes kiriş  $m+3=2j$  şartını sağlamalıdır. Buna statikçe belirliliğin tarifi denilir.

### Statikçe Belirliliğin Tarifi:

Basit bir kafes taşıyıcı sistemi üç çubuktan oluşur. Bu sistem üç adet çubuk ve bunların bağlandığı üç adet düğüm noktası içerir. Bu sisteme eklenecek iki çubuk düğüm noktası sayısını bir artırır. Böylece oluşturulacak “m”, (member) sayıdaki çubuk ve “j” (joint) sayıdaki düğüm noktasından oluşan kafes sistemi de bir basit kafes sistemidir. Bir ucu sabit, diğer ucu hareketli mesnetli bir kafes kirişte üç tane mesnet reaksiyonu oluşur (3). Basit kafes kirişte üç tane de eksenel kuvveti bilinmeyen çubuk vardır (m). Bunların toplamı bilinmeyenleri oluşturur ( $m+3$ ). Statik sistemlerin çözümünde bilinmeyen sayısı kadar denklem kurulmalıdır. Her bir düğüm noktasına iki tane iz düşüm denge denklemi kurulabilir. ( $\sum Fx^{\rightarrow} = 0$  ve  $\sum Fy^{\rightarrow} = 0$ )

Basit kafes kirişte üç tanede düğüm noktası olduğuna göre ve her düğüm noktasına iki denklem uygulanabildiğinden ( $2j$ ) denklem sayısı da  $m+3$  şartına eşit olmalıdır.



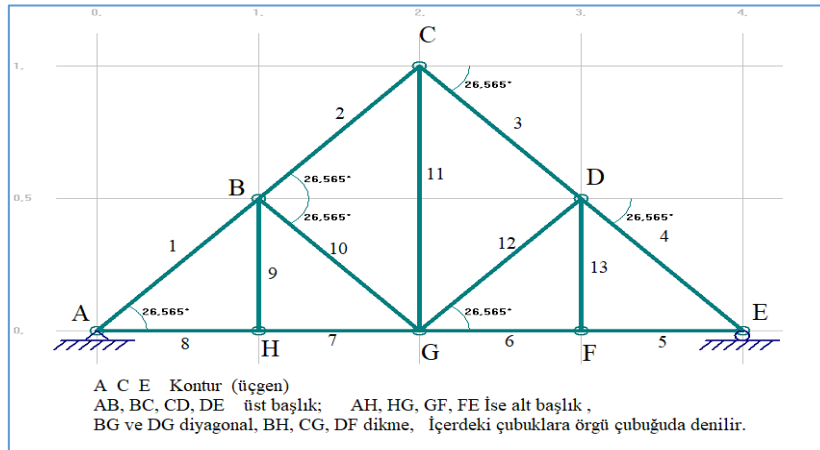
Bir kafes kirişin İzostatik olabilmesi için  $m+3=2j$  şartını sağlamalıdır.

$m+3=2j$  İzostatik

$m+3<2j$  Dengesiz, çubuk sayısı eksik,

$m+3>2j$  statikçe belirsiz anlamına gelir.

Şekildeki gibi çubuklardan oluşmuş sistemlere kafes sistemler denir. Çubukların birleştiği noktalar mafsallıdır. Bu noktalara düğüm noktaları denir (A, H). Çubuklar birer pandül ayak gibi çalışırlar. Çatılarda kullanılan kafes sistemler iklim koşullarına göre seçilirler. Stadyum, uçak hangarı gibi çok büyük açıklıkların kapatılmasında uzay kafes sistemlerle birlikte kullanılabilirler.



Bütün kafes sistemlerde üstteki çubuklara üst başlık, alttaki çubuklara alt başlık adı verilir. Aradaki çubuklar ise örgü çubukları denilir. Kafeslerin oluşturulması çekirdek denilen bir üçgen teşkil edilerek üç çubuğu mafsalı olarak birleştirmeye başlanılır. Bundan sonra bir düğüm noktası alınıp ve bir doğrultuda olmayan iki çubukla bağlanır. Herhangi bir üçgen çekirdek olarak alınabilir. Kafes kirişin etkiyen yükleri çubuklar üzerinden düğüm noktalarına ve en kısa yoldan da mesnetlere aktarabilmesi için her bir çubuğa etkiyen eksenel kuvvet (basınç veya çekme) bilinmeli, sonra bir tasarım dersinde örneğin çelik yapılar dersinde öğretileceği gibi güvenli kesit boyutları seçilmelidir.

#### Kafes sistemlerin sınıflandırılması:

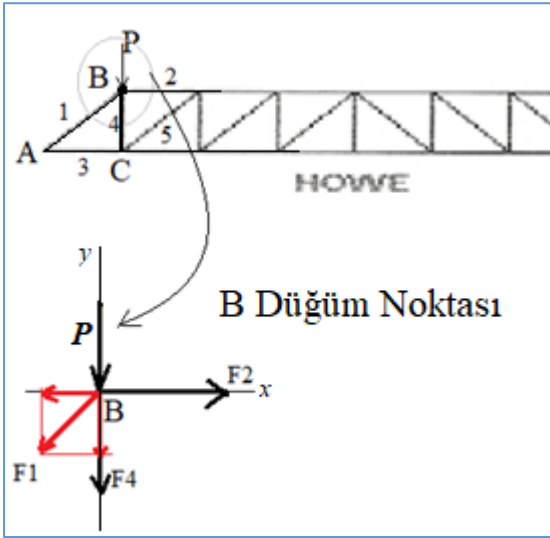
- 1- Düzlem kafes kirişler (İzostatik, hiperstatik)
- 2-Uzay kafes kirişler

#### KAFES KİRİŞLERİN ÇUBUK KUVVETLERİNİN HESABI

Kafes kirişlerin çubuk kuvvetlerinin hesabında kullanılan yöntemler şunlardır.

- 1-Düğüm noktalarının dengesi yöntemi
- 2- Kesim (Ritter) yöntemi
- 3- Grafik yöntemler (Maxwell, Cremona)
- 4- Bilgisayar paket programları

#### - Düğüm Noktalarının Dengesi Yöntemi İle Kafes Kiriş Çubuk Kuvvetlerinin Hesabı



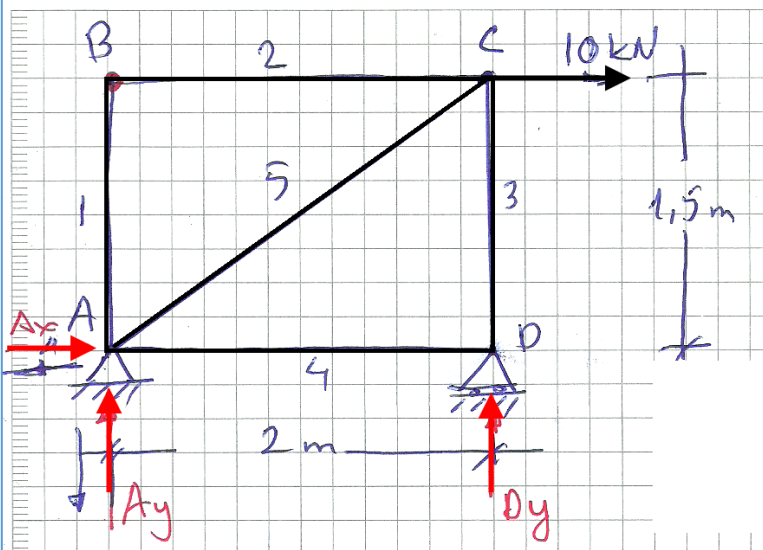
Her düğüm noktası dengede ise bütün sistem dengede demektir. Verilen kafes kirişin  $m+3=2j$  şartını sağlayıp sağlamadığına bakılır. Daha sonra mesnet reaksiyonları hesaplanır. Yerlerine yazılır. Sonra en fazla iki bilinmeyen çubuğun bulunduğu bir düğüm noktası ele alınır. Bunun için bir sıra yoktur. Tek kural iki bilinmeyen olacak. Bu düğüm noktası alınır ve bu DN'da birleşen varsa, reaksiyon, kuvvet ve çubuklar dik koordinat sistemine yerleştirilir. Bilinmeyen çubukların çekme çubuğu (+) olduğu varsayılarak orijinden uzaklaşır tarzda gösteririz. Yatayla açı yapan çubuklar varsa dik bileşenlerine ayrılır. Alttaki şekilde B düğüm noktasında üç çubuk ve bir kuvvet birleşiyor. Burada birleşen çubuklardan birisinin bilindiği varsayalım. F1 çubuğu

bileşenlerine ayrılır ( $F_x, F_y$ ). Bu noktaya üç denge denklemi uygulanır. Bu DN'da bilinmeyen çubukların Çekme (+) yada basınca çalıştığı (-) belirlendikten sonra diğer her hangi bir iki bilinmeyenli DN na geçilir. Böylece bütün çubuklar hesaplanıncaya kadar bütün DN ele alınır. Sonuçlar bir tabloda gösterilir.

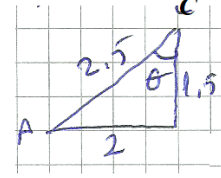
**ÖRNEK:** Verilen İzostatik kafes kirişin çubuk kuvvetlerini Düğüm Noktalarının dengesi yöntemi ile hesaplayınız. Sonuçları tabloda gösteriniz.

**Çözüm:** Önce mesnet reaksiyonları hesaplanır. Sonra kirişe bakılır yükleme ve şekle göre sıfır kuvvet alan çubuklar tespit edilir.

Bu şekil ve yükleme şartlarına göre P1, P2, P4 sıfır kuvvet alan çubuklardır. B ve D düğüm noktaları ele alındığında bunun böyle olduğu görülür.



**Uzunluk ve açı hesabı**



$$AC = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 \text{ m}$$

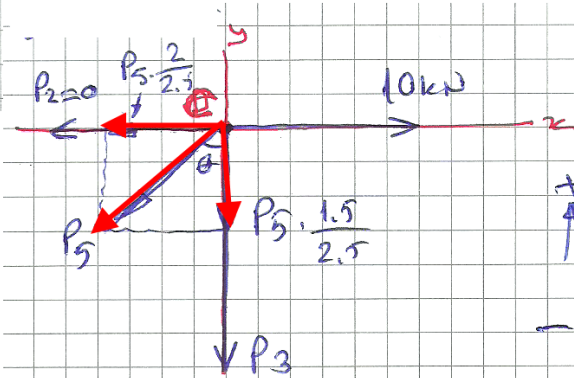
$$\sin \theta = \frac{2}{2.5}, \cos \theta = \frac{1.5}{2.5}$$

**M. R. Hesabı**

| Gü No | Gek + | Bes - |
|-------|-------|-------|
| P1    | 0     |       |
| P2    | 0     |       |
| P3    |       | 7.5   |
| P4    | 0     |       |
| P5    | 12.5  |       |

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad A_x + 10 = 0 \quad A_x = -10 \text{ kN} \quad \leftarrow \text{Yer. Değ.} \\ \sum F_y = 0 & \quad A_y + D_y = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad 10 \cdot 1.5 = 2 D_y \quad \rightarrow D_y = 7.5 \text{ kN} \uparrow \\ & \quad A_y = -7.5 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

Diğer çubuk kuvvetlerini hesaplamak için C Düğüm noktasının dengesini araştırmak yeterli olacaktır.



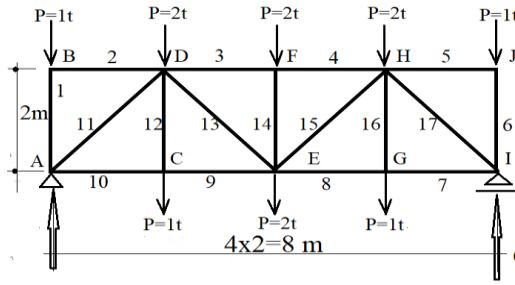
$$\sum F_x = 0 \quad 10 - P_5 \cdot \frac{2}{2.5} = 0$$

$$P_5 = +12.5 \text{ kN (Gekme)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P_3 - P_5 \cdot \frac{1.5}{2.5} = 0$$

$$P_3 = -12.5 \cdot \frac{1.5}{2.5} = -7.5 \text{ kN (Besme)}$$

**Misal:** Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerini DN dengesi yöntemi ile hesaplayınız. Sistem yük ve şekilde simetriktir.



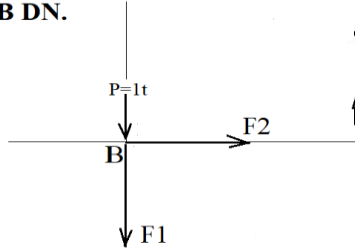
simetriden dolayı  
 $A_y = I_y = 12/2 = 6 \text{ ton}$

$A_x = 0$

$m+3=2 \cdot j$   
 $17+3=2 \cdot 10$  statikçe belirli

Çubuk kuvvetleri F1, F2 şeklinde gösterilmiştir.

**B DN.**



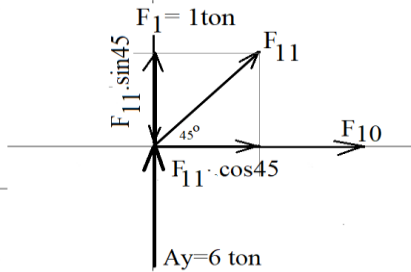
$$\sum F_x = 0 \quad F_2 = 0 \text{ (kuralı hatırlayınız)}$$

$$F_2 = F_5 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -1 - F_1 = 0 \quad F_1 = -1 \text{ ton (basıncı)}$$

$$F_1 = F_6 = -1 \text{ t}$$

**A DN**



$$\sum F_x = 0 \quad F_{10} + F_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad 6 + F_{11} \cdot \sin 45^\circ - 1 = 0 \quad F_{11} = -7,07 \text{ t basıncı}$$

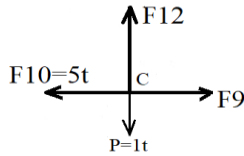
$$F_{11} = F_{17} = -7,07 \text{ t}$$

(1) denklemden,

$$F_{10} + (-7,07 \cdot \cos 45^\circ) = 0 \quad F_{10} = +5 \text{ t çekme}$$

$$F_{10} = F_7 = +5 \text{ t}$$

**C DN**



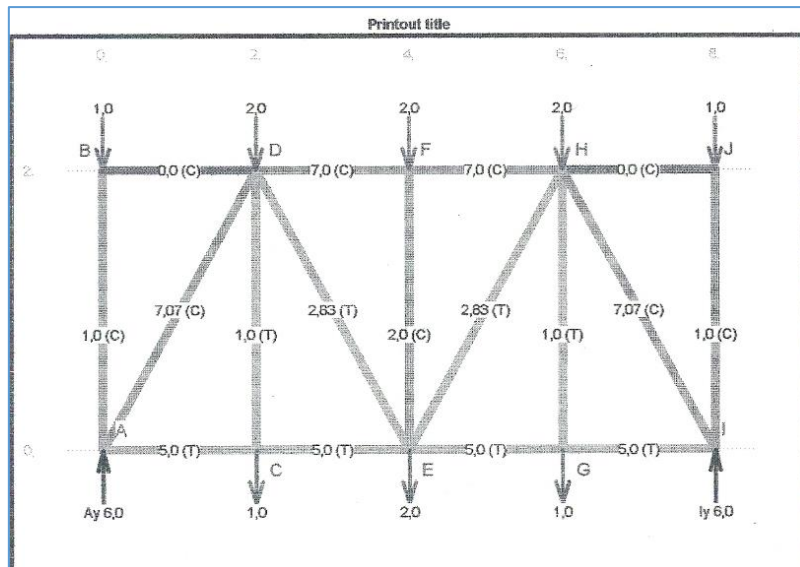
$$\sum F_x = 0 \quad F_9 - 5 = 0 \quad F_9 = 5 \text{ t çekme}$$

$$F_9 = F_8 = 5 \text{ t çekme}$$

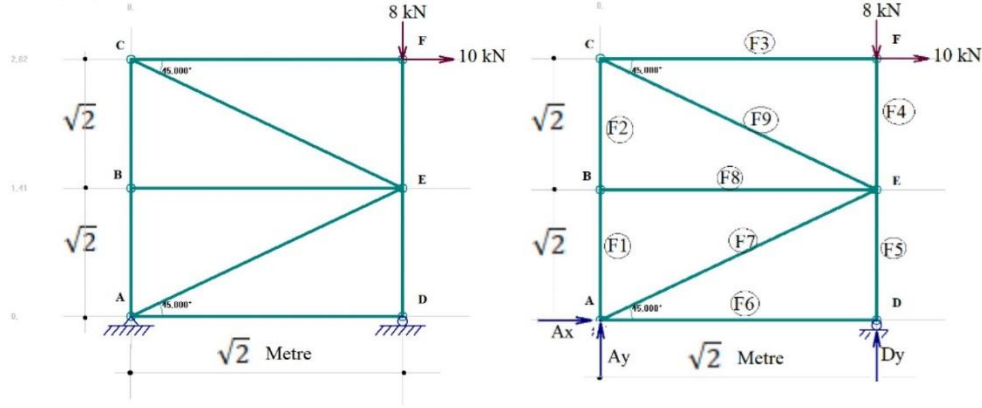
$$\sum F_y = 0 \quad F_{12} - 1 = 0 \quad F_{12} = 1 \text{ t çekme}$$

$$F_{12} = F_{16} = 1 \text{ t çekme}$$

3, 4, 13, 14, 15 nolu çubukların kuvvetlerini de siz hesaplayınız.  $F_3 = F_4 = -7 \text{ t basıncı}$ ,  $F_{13} = F_{15} = 2,83 \text{ çekme}$ ,  $F_{14} = -2 \text{ t}$



**Misal:** Şekilde verilen İzostatik düzlem kafes kirişin bütün çubuk kuvvetlerini düğüm noktalarının dengesi yöntemiyle hesaplayınız.



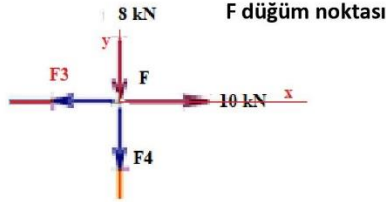
1- kafes kirişin serbest cisim diyagramı çizilir.

2- Kafes kirişin mesnet reaksiyonları hesaplanır.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow Ax + 10 = 0 \quad Ax = -10 \text{ kN} \leftarrow \quad \uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow Ay + Dy = 0$$

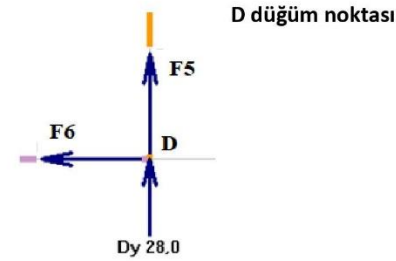
$$\uparrow \sum M_A = 0 \rightarrow 8 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot Dy = 0 \quad Dy = 28 \text{ kN} \uparrow \text{ ve } Ay = -20 \text{ kN} \downarrow$$

3- Eksenel kuvveti bilinmeyen en fazla iki çubuğun olduğu düğüm noktası seçilir.



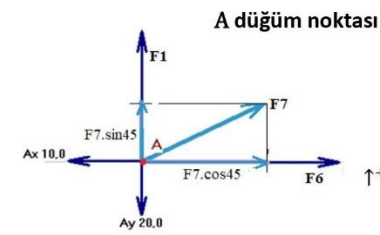
$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow 10 - F_3 = 0 \quad F_3 = 10 \text{ kN (Çekme)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow (-8) - F_4 = 0 \rightarrow F_4 = -8 \text{ kN (basınç)}$$



$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow F_6 = 0$$

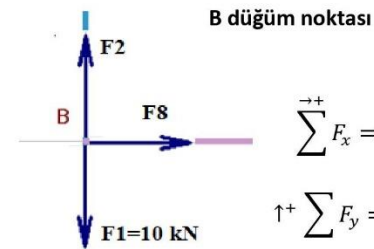
$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad 28 + F_5 = 0 \quad F_5 = -28 \text{ kN (Basınç)}$$



$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow (-10) + (F_7 \cdot \cos 45) + F_6 = 0 \quad F_7 = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,14 \text{ kN (Çekme)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad (-20) + (F_7 \cdot \sin 45) + F_1 = 0$$

$$(-20) + \left( \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + F_1 = 0 \quad F_1 = +10 \text{ kN (Çekme)}$$



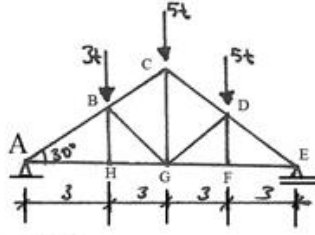
$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow F_8 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad (-10) + F_2 = 0 \quad F_2 = 10 \text{ kN (Çekme)}$$

Hesaplanmayan F9 çubuk kuvvetini de siz hesaplayınız.

| Ç.N | Çekme | Basınç |
|-----|-------|--------|
| 1   | 10    |        |
| 2   | 10    |        |
| 3   | 10    |        |
| 4   |       | 8      |
| 5   |       | 28     |
| 6   | 0     | 0      |
| 7   | 14,14 |        |
| 8   | 0     | 0      |
| 9   |       |        |

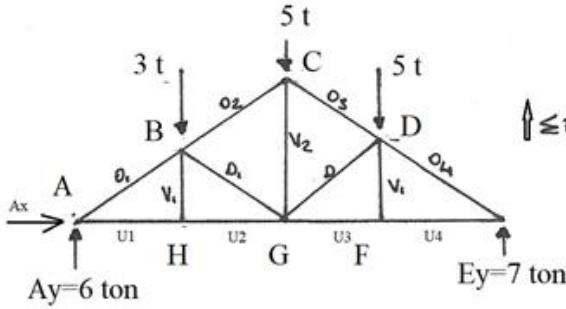
## ÖRNEK



Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerini düğüm noktalarının dengesi yöntemi ile hesaplayınız. Sonuçları çizelgede gösteriniz.

### İŞLEM SIRASI

1- Kafes kirişin mesnet reaksiyonları hesaplanır ve yerlerine doğru yönleri ile kuvvet olarak etki ettirilir.



$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + E_y = 3 + 5 + 5 = 13 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0$$

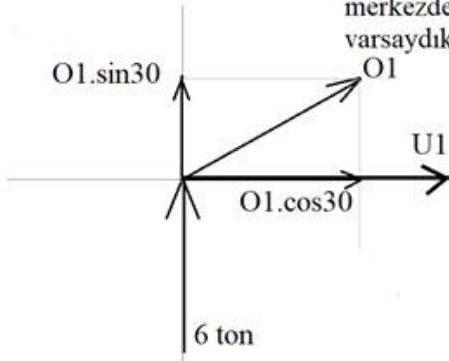
$$3 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 12 \cdot E_y$$

$$E_y = 7 \text{ ton} \quad A_y = 6 \text{ ton}$$

2- En fazla iki adet bilinmeyen çubuğun bulunduğu her hangi bir düğüm noktası ele alınır ve dik koordinat sisteminin merkezine yerleştirilir. Yatay veya düşeyde açı yapan çubuklar varsa dik bileşenlerine ayrılır. Eksenel kuvveti bilinmeyen çubuklar bu sistemde çekmeye zorlandığı kabul edilerek merkezden uzaklaşır şekilde gösterilir.

#### A DÜĞÜM NOKTASI

Bu DN da O1 ve U1 çubuk kuvvetleri bilinmemektedir. Görüldüğü gibi merkezden uzaklaşır tarzda gösterdik. Yani çekmeye çalıştığımızı varsaydık



$$\sum F_x = 0 \quad U1 + O1 \cdot \cos 30 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad O1 \cdot \sin 30 + 6 = 0 \quad (2)$$

$$O1 = -12 \text{ ton (basınç)}$$

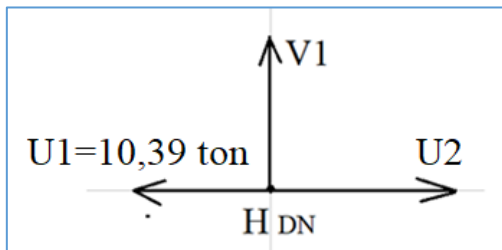
O1 (1).denklemden işareti ile birlikte yerine yazılırsa

$$U1 + (-12 \cdot \cos 30) = 0$$

$$U1 = 10,39 \text{ ton (çekme) olarak bulunur.}$$

Bu düğüm noktasında O1 çubuğu basınca, U1 çubuğu çekmeye zorlanıyormuş.

**H DÜĞÜM NOKTASI** (Bu noktayı seçmemizin sebebi iki bilinmeyen çubuğun olmasıdır. Her hangi bir sıra yoktur)

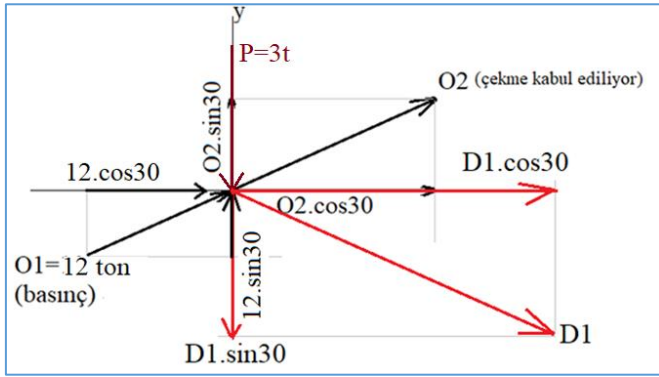


$$(\sum F_x = 0 \quad U2 - 10,39 = 0 \quad U2 = 10,39 \text{ ton (çekme)})$$

$V1 = 0$  (bu yükleme çeşidinde her zaman 0 (sıfır) olur.)

**Kural:** Her hangi bir kafes kirişte, üç çubuğun birleştiği bir düğüm noktasında çubuklardan ikisi aynı doğrultuda ise, bunlara dik olan üçüncü çubuğun aksisinde kuvvet ya da çubuk yok ise bu çubuk her zaman sıfır kuvvet alır.

**B DÜĞÜM NOKTASI** Bu düğüm noktasında artık iki kuvveti (O2 ve D1) çubuk bilinmiyor. O1 =-12 ton bulunmuştu, Düğüm noktasına etki ettirirken basınç olarak etki ettirdik. Artık – yazılmaz. V1 çubuk kuvveti de sıfır bulunmuştu. Bu yüzden gösterilmedi.



$$\sum F_x = 0 \quad 12 \cos 30 + D_1 \cos 30 + O_2 \cos 30 = 0$$

$$D_1 \cos 30 + O_2 \cos 30 = -10,39 \quad (1)$$

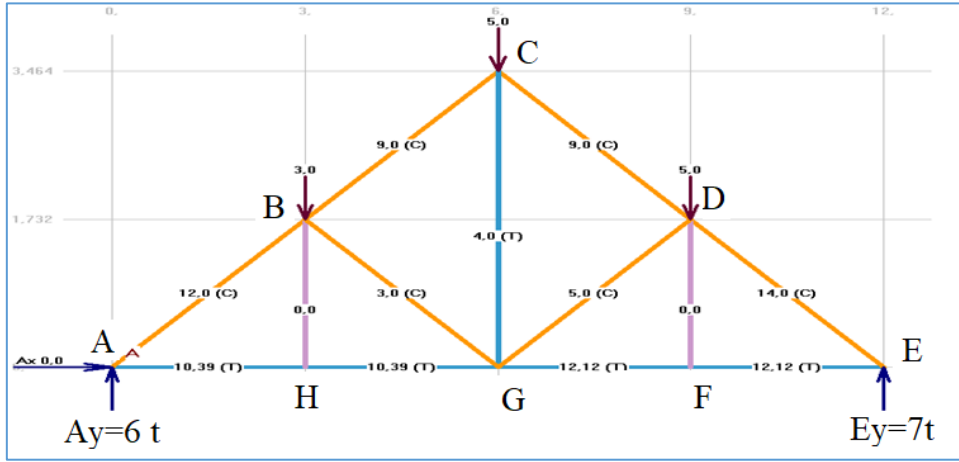
$$\sum F_y = 0 \quad O_2 \sin 30 + 12 \sin 30 - D_1 \sin 30 - 3 = 0$$

$$O_2 \sin 30 - D_1 \sin 30 = -12 \sin 30$$

$$O_2 \sin 30 - D_1 \sin 30 = -3 \quad (2)$$

1. ve 2. Denklemden işlem yapılırsa  $O_2 = -9$  ton (basınç),  $D_1 = -3$  ton (basınç) olarak bulunur.

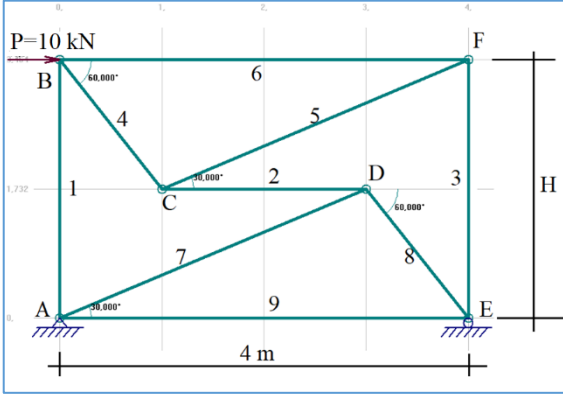
Diğer düğüm noktaları da teker teker ele alınarak bütün çubuk kuvvetleri bulununcaya kadar işleme devam edilir. Elde edilen çubuk kuvvetleri bir çizelgede özetlenir. Aşağıdaki şekilde çubuk kuvvetlerinin bir bilgisayar programı ile çözülmüş değerleri verilmiştir.



| ÇUBUK NO | ÇEKME (+) | BASINÇ (-) |
|----------|-----------|------------|
| O1       |           | 12         |
| O2       |           | 9          |
| O3       |           | 9          |
| O4       |           | 14         |
| U1       | 10,39     |            |
| U2       | 10,39     |            |
| U3       | 12,12     |            |
| U4       | 12,12     |            |
| V1       | 0         |            |
| V2       | 4         |            |
| V3       | 0         |            |
| D1       |           | 3          |
| D2       |           | 5          |

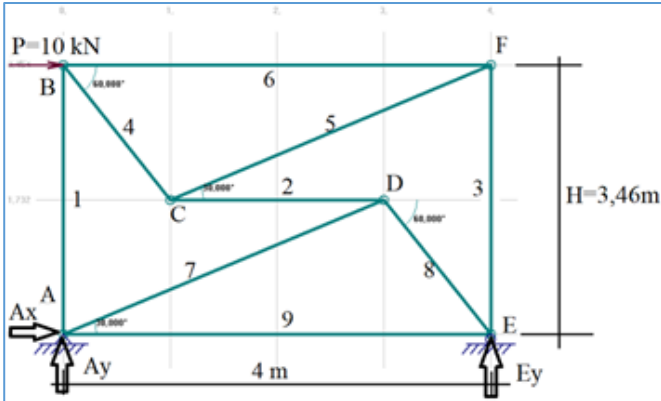
**Şekil 13:** Problemin MDSolid 30 programı ile çözülmüş hali. <https://web.mst.edu/~mdsolids/>

**MİSAL:** Şekilde verilen kafes kirişin çubuk kuvvetlerini DN dengesi yöntemi ile hesaplayınız.



Kafes kirişin düğüm noktalarına tek tek bakıldığında her düğüm noktasında üç tane bilinmeyen çubuk olduğu görülür. Oysa kural olarak düğüm noktalarının dengesi yöntemini kullanabilmek için en az iki bilinmeyen çubuğun olduğu bir düğüm noktası bulup çözüme oradan başlamak gerekir. Bu kafes kirişin çözümünde DN dengesi yönteminin yeterli olmadığı, bu yöntemin yanında başka bir çözüm yöntemine de ihtiyaç olacağı anlamına gelmektedir.

## -KESİM YÖNTEMİ İLE KAFES KİRİŞ ÇUBUK KUVVETLERİNİN HESABI



Bu çözüm yönteminde mesnet reaksiyonları bulunduğundan sonra yerlerine doğru yönleriyle birlikte kuvvet olarak etki ettirilir.

Kafes kiriş en fazla üç bilinmeyen çubuğun bulunduğu bir düzlemde kesilir.

Kesim çizgisinin bir tarafı ele alınır diğer tarafı silinir. Kesilen çubukların ucuna ok yapılarak en yakın DN 'na kadar uzatılır.

Eğik Çubuk kesilmiş ise bu DN da dik bileşenlerine ayrılır.

Elde edilen kafes kiriş parçasına üç denge denklemi uygulanarak öncelikle kesim yapılan çubukların kuvvetleri hesaplanır.

Böylece kafes kirişin diğer çubukları DN dengesi yöntemi ile hesaplanabilir hale gelir.

Bu işlem sırasını yanda verilen örnek üzerinde uygulayalım.

-Mesnet reaksiyonlarının hesabı.

$$\sum \rightarrow F_x = 0$$

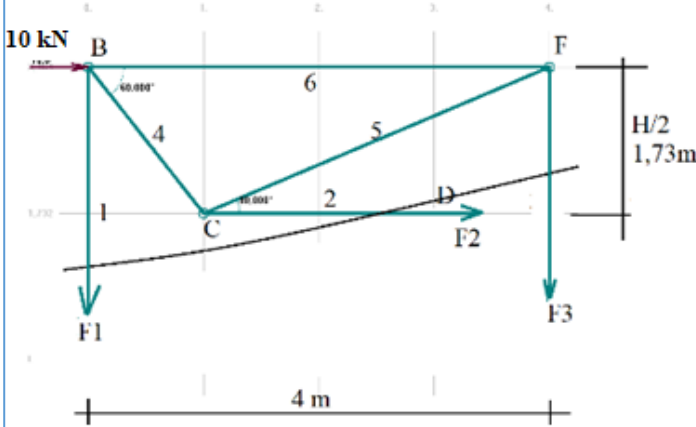
$$10 + A_x = 0 \quad A_x = -10 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

$$A_y + E_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 10 \cdot 3.46 - E_y \cdot 4 = 0$$

$$E_y = 8.65 \text{ kN} \uparrow \quad A_y = -8.66 \text{ kN} \downarrow$$



Mesnet reaksiyonları hesaplanıp doğru yönleri ile birlikte şekil üzerinde gösterilmiştir. İkinci işlem olarak en fazla üç bilinmeyen çubuğun bulunduğu bir düzlem seçilir ve bu çubuklar bu düzlemden (1-1) kesilir. Bu örnekte mesnetlerin bulunduğu alt kısım kesilerek atıldı. Üst kısımda kesilen çubuklar işe yarayan bir yere kadar uzatıldı ve üç denge denklemi kuruldu.

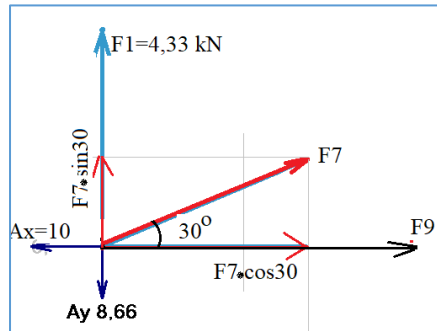
$$\sum Fx^{\rightarrow} = 0 \quad F_2 + 10 = 0 \quad F_2 = -10 \text{ kN. (basınç) (Compression)}$$

$$\uparrow \sum Fy = 0 \quad F_1 + F_3 = 0 \quad (\text{çözüm vermedi})$$

$$\sum MB = 0 \quad -F_2 \cdot 1,73 + F_3 \cdot 4 = 0 \quad -(-10) \cdot 1,73 + F_3 \cdot 4 = 0 \quad F_3 = -4,33 \text{ kN basınç}$$

$$F_1 + F_3 = 0 \quad \text{denklemden } F_1 + (-4,33) = 0 \quad F_1 = +4,33 \text{ kN çekme (Tension)}$$

Bu kesimde bulunan üç çubuk kuvveti diğer çubukları Düğüm noktası dengesi yöntemi ile hesaplanabilir duruma getirmiş olur. Örnek olarak A-D-N ele almış olalım.



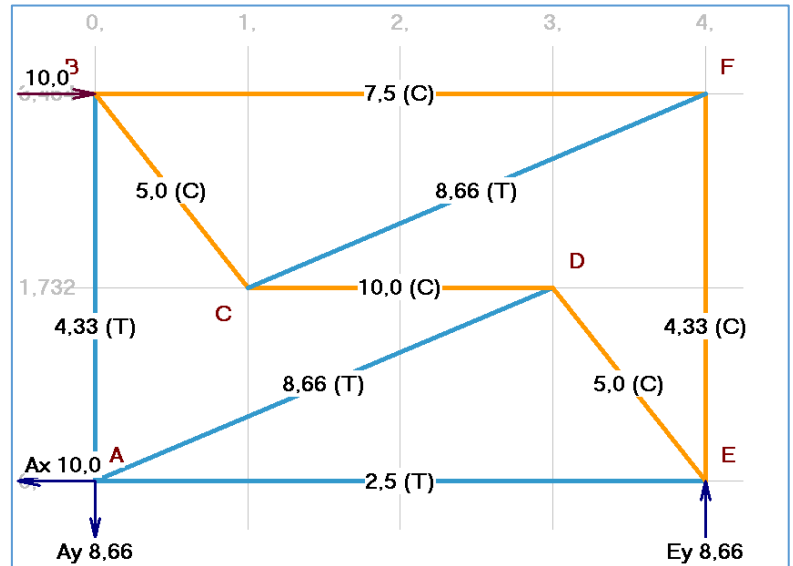
| Çub No | ÇEKME | BASINÇ |
|--------|-------|--------|
| F1     | 4,33  |        |
| F2     |       | 10     |
| F3     |       | 4,33   |
| F4     |       | 5      |
| F5     | 8,66  |        |
| F6     |       | 7,5    |
| F7     | 8,66  |        |
| F8     |       | 5      |
| F9     | 2,5   |        |

$$\sum Fx^{\rightarrow} = 0 \quad F_7 \cdot \cos 30 + F_9 - 10 = 0 \quad F_7 \cdot \cos 30 + F_9 = 10$$

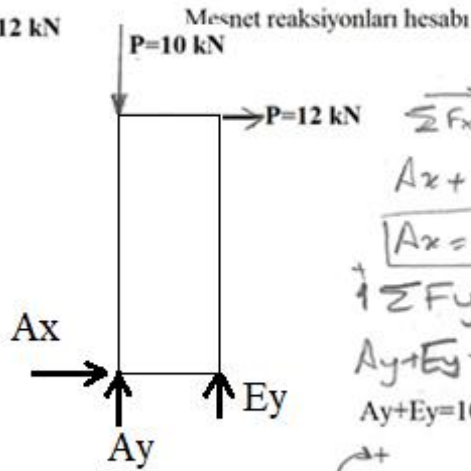
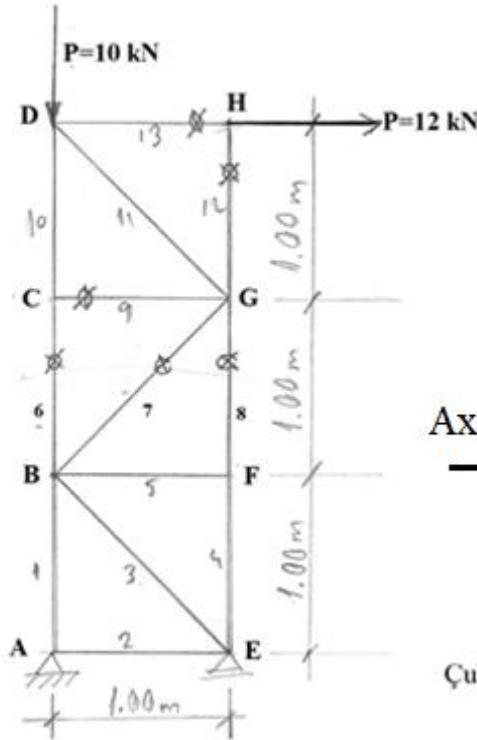
$$\uparrow \sum Fy = 0 \quad 4,33 + F_7 \cdot \sin 30 - 8,66 = 0 \quad F_7 = 8,66 \text{ kN (çekme)}$$

$$8,66 \cdot \cos 30 + F_9 = 10 \quad F_9 = 2,5 \text{ kN (çekme)}$$

Diğer çubukların kuvvetleri hesaplanmış ve aşağıdaki şekilde verilmiştir. Sizde çözerek cevaplarınızı karşılaştırınız.



ÖRNEK: Şekildeki kafes kirişin işaretlenmiş çubuklarının kuvvetlerini kesim yöntemi ile hesaplayalım.



Mesnet reaksiyonları hesabı

$$\sum F_x = 0$$

$$Ax + 12 = 0$$

$$Ax = -12 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$Ay + Ey - 10 = 0$$

$$Ay + Ey = 10$$

$$\sum M_A = 0 \quad 12 \times 3 - 1 \times Ey = 0$$

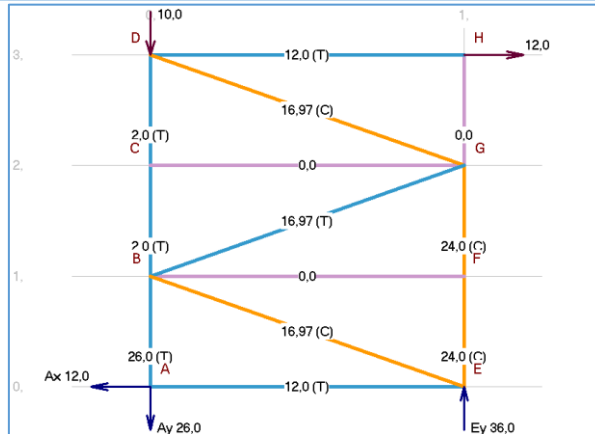
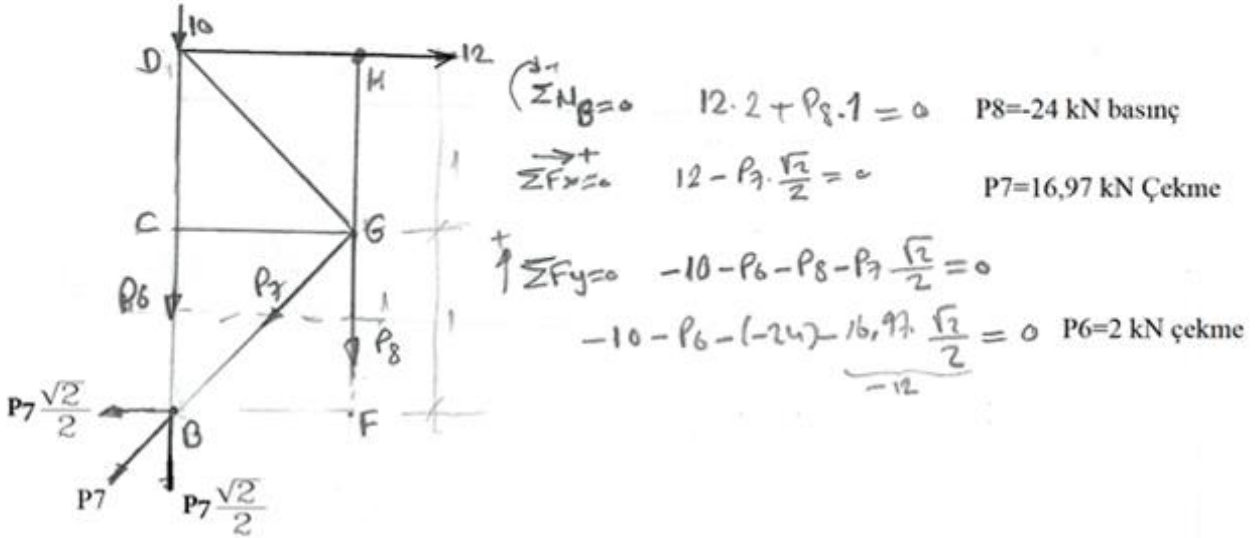
$$Ey = 36 \text{ kN} \uparrow \quad Ay = -26 \text{ kN} \downarrow$$

Çubuk kuvvetleri hesabı

$P_{12}=0$ ,  $P_{13}=12 \text{ kN}$  (çekme),  $P_9=0$  (Başka sıfır çubuk varmı?).  $P_6$ ,  $P_7$ ,  $P_8$  çubuklarını bir doğru ile keselim.

Kesim yapılan kısmın alt tarafını silelim. (üst tarafta silinebilir.) Kesim yapılan çubukları C ve G düğüm noktalarından uzaklaşır tarzda gösterelim.  $P_7$  yi B-D'ne kadar uzatıp dik bileşenlerine ayıralım.

Sonra bu sisteme üç denge denklemini sırasıyla uygulayalım.



#### 4- HİPERSTATİK SİSTEMLERİN TANITILMASI

Hiperstatik sistemlerin incelemesine geçmeden önce bazı tanımları hatırlayalım.

##### 1- İzostatik sistem (kiriş)

Belirli bir dış tesirin (kuvvet, yük) altında bulunan, mesnet tepkileri ile kesit tesirleri (kesme ve normal kuvveti) sadece denge şartlarından hesaplanabiliyorsa tasarladığımız yapısal kirişe (sistem) “izostatik sistem” denir.

Şekil 1 de bilinmeyen kuvvet sayısı:  $A_x$ ,  $A_y$  ve  $B_y$  olmak üzere 3 tanedir.

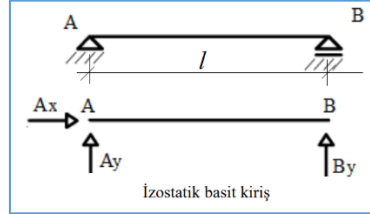
Kurulabilecek denge denklemleri sayısı,

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

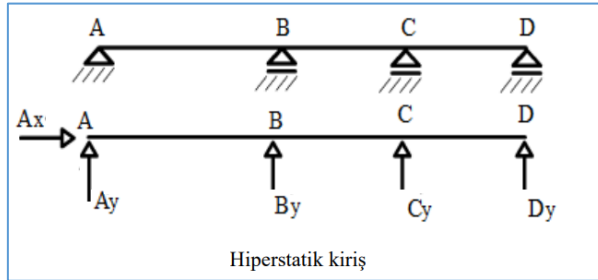
$$\sum M = 0 \text{ olmak üzere üç tanedir.}$$

Denge denklemleri bilinmeyen kuvvet sayısına eşit olduğundan sistem izostatik durumdadır.



##### 2- Hiperstatik sistem (kiriş)

Bütün mesnet tepkilerinin, kesit tesirlerinin ve bunlara bağlı olarak şekil değiştirmelerin ve yer değiştirmelerin yalnızca üç denge denklemi yardımıyla hesaplanamadığı sistemlere hiperstatik sistemler denilir. Gerber kirişlerinde fazla bilinmeyen reaksiyon sayısı kadar mafsal eklenmeden önceki halleri de hiperstatik olduğu biliniyor. Hiperstatik sistemlerin mesnet reaksiyonu ve kesit tesirleri hesabı için üç denge denklemi yetmez, bunların yanında iç kuvvet-şekil değiştirme bağıntılarına ve geometrik uygunluk şartlarından elde edilen süreklilik denklemlerine ihtiyaç vardır.



Şekil de bilinmeyen kuvvet sayısı:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$  ve  $D_y$  olmak üzere 5 adettir. Kurulabilecek denge denklemleri sayısı üç tanedir.

$$+\uparrow \sum F_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0$$

Denge denklemleri (3 tane) bilinmeyen kuvvet sayısından (5 tane) az olduğundan sistem hiperstatik durumdadır. Yani daha önceden bildiğimiz gibi kiriş yada sistem  $5-3=2$ . derece hiperstatiktir denilir ve şu şekilde de ifade edilebilir. statikçe belirlilik,  $n = 3m+r-3j$  denklemiyle ifade edilir. Burada;

n: Hiperstatiklik Derecesi

m: Eleman Sayısı

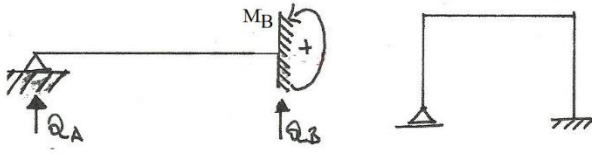
r: Mesnet Reaksiyonları Sayısı

j: Düğüm noktaları (mesnetler dahil) sayısıdır.

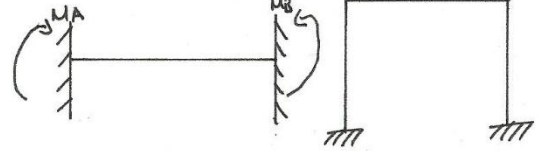
## Hiperstatik Kiriş Çeşitleri

Hiperstatik sistemlerin başlıcaları şunlardır.

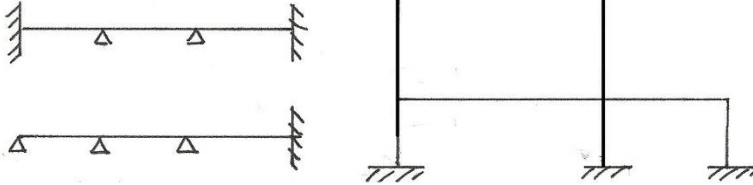
**Bir ucu ankastre, bir ucu serbest oturan kirişler**



**İki ucu ankastre kiriş**



**Sürekli kirişler ve çerçeveler**

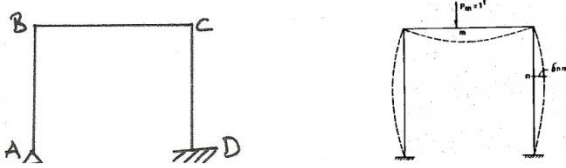


Hiperstatik sistemlere, bina iskeletlerinde taşıyıcı kısım olarak, endüstri yapılarında , köprülerde her zaman rastlanır. Bu sistemleri oluşturan elemanlar doğru veya eğri eksenli, sabit veya değişken enkesitli olabilirler. Her türlü yük ve zorlamanın etkisi altında bulunurlar.

### ÇUBUK:

İncelenen sistemde belirli bir tarif yapabilmek için bütün doğru veya eğri eksenli elemanlara çubuk adı verilir.

AB çubuğu, BC çubuğu gibi. Çubukların temsil edildiği ince çizgiler , aslında gerçek elemanların boy ekseninden geçen ağırlık eksenleridir.



### DÜĞÜM NOKTASI:

İki veya daha fazla çubuğun kesiştiği noktaya düğüm noktası denir B Düğüm noktası (B DN) gibi gösterilir.

### Rijit Düğüm Noktası:

Tekil veya yayılı yüklerin etkisi altında, sistemin şekil değiştirmesi halinde bir düğüm noktasında birleşen çubuklar arasındaki açı sabit kalıyorsa, bu gibi düğüm noktalarına rijit düğüm noktası denir.

## Hiperstatik Sistemlerin Hesap Yöntemleri

1- Kuvvet Yöntemi (sürekli kirişlerde Clepeyron denklemleri)

2- Deplasman Yöntemleri (Yer Değiştirme Yöntemleri)

a) Açı Yöntemi

b) Cross Yöntemi

c) Sabit Noktalar Yöntemi

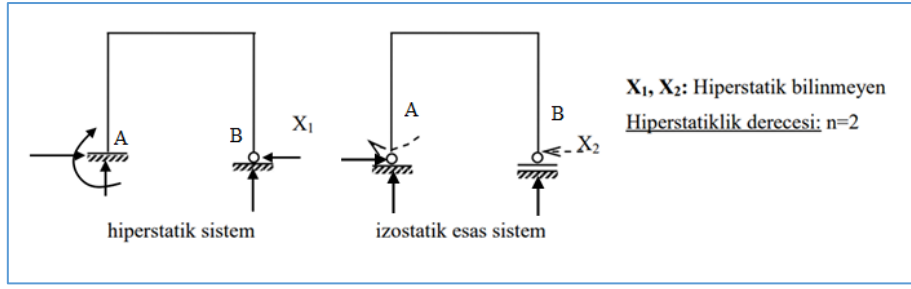
d) Kani Yöntemi v.s.

3- Başlangıç Değerleri Yöntemi (Travers Yöntemi)

**İzostatik Esas Sistem:** Bir hiperstatik sistemde kesimler yapılarak bazı mesnet tepkileri ve/veya kesit zorlarının kaldırılması suretiyle elde edilen taşıyıcı ve izostatik sistemdir. Bir hiperstatik sistemden çok sayıda izostatik esas sistem (i.e.s.) elde edilebilir.

**Hiperstatik Bilinmeyen:** Hiperstatik sistemde yapılan kesimlerle kaldırılan (silinen) kesit zorları ve mesnet tepkileridir.

**Hiperstatiklik Derecesi:** Hiperstatik sistemi izostatik hale getirebilmek için yapılan kesimlerle kaldırılan mesnet tepkileri ve kesit zorlarının sayısıdır. Hiperstatiklik derecesi bir hiperstatik sistemin bütün mesnet tepkilerinin ve kesit zorlarının hesaplanabilmesi için denge denklemlerine ilave edilmesi gereken denklem sayısını verir.



Soldaki çerçevenin mesnetlerin ankastre ve sabit mesnettir ve beş bilinmeyen reaksiyonu var. Bunu üçe indirmek lazımdır. Bunun için mesnetlerden birer reaksiyonu hiperstatik bilinmeyen olarak belirlemek gerekir. Ankastre mesnetin üç reaksiyonundan birisi örneğin ankastrelik momenti hiperstatik bilinmeyen ( $X_1$ ) olarak seçilirse, bu mesnet bir derece indirgenir ve sabit mesnet olur. Diğer B deki sabit mesnetin yatay reaksiyonu da hiperstatik bilinmeyen ( $X_2$ ) olarak seçilirse bu mesnette bir derece indirgenerek hareketli mesnete dönüşür. Bu iki hiperstatik bilinmeyen izostatik esas sistemde kuvvet olarak gösterilir.

### TEK AÇIKLIKLI HİPERSTATİK KİRİŞLERİN İÇ KUVVETLERİNİN HESABI VE N,Q,M DİYAGRAMLARININ ÇİZİMİ

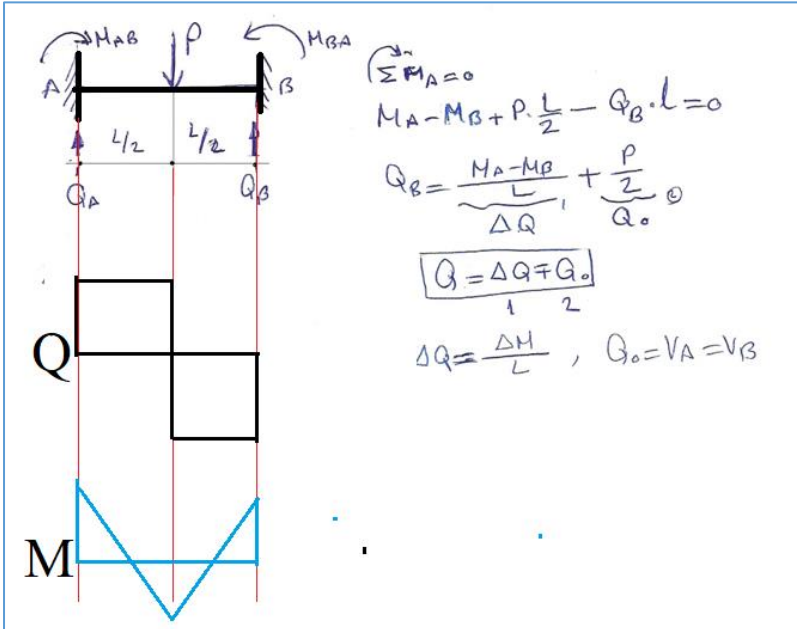
Bir HP kirişin kesit tesir diyagramlarını çizebilmek için öncelikle İzostatik kirişlerin iç kuvvetlerinin analizini ve kesit tesirleri diyagramlarını iyi bilmek gerekir.

Tek açıklıklı HP kirişlerin mesnet reaksiyonlarının hesabı yapılarak işleme başlanır. Bir HP kirişin mesnet reaksiyonu ( $Q$ ) iki kuvvetin cebrik toplamından oluşur.  $Q = Q_0 \pm \Delta Q$

1-Kirişe etki eden dış yüklerden dolayı kiriş mesnetlerinde oluşan reaksiyonlar ( $Q_0$ ). Bu reaksiyonlar hesaplanacak kirişin İzostatik esas sistem (İES) durumunda iken hesaplanan reaksiyonlardır.

2- Kirişin mesnet şartlarından doğan reaksiyondur. Bu kuvvetler hiperstatik kirişin ankastrelik uç momentlerinin farkından doğan reaksiyonlardır ( $\Delta Q$ ). Bu söylediklerimizi iki ucu ankastre mesnetli tam ortasından tekil yüklü bir hiperstatik kiriş üzerinde açıklayalım.

#### MİSAL:



Ankastrelik momentler kirişin mesnet durumu ve yükleme şekline göre hazırlanmış tablolardan alınabilir.

Tablodan tekil yüklü iki ucu ankastre mesnetli kirişin mesnet momentleri tablodan aşağıdaki, gibi alınabilir.

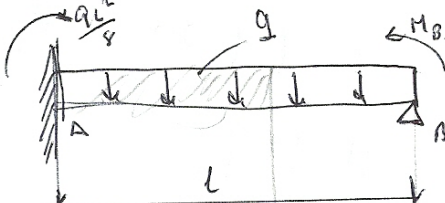
$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{P \cdot L}{8}$$

Mesnet reaksiyonu ise, Ankastrelik momentlerin farkı olan 1. Terim sıfır olduğu için geri kalan 2. Terim İzostatik esas sistem deki mesnet reaksiyonu olup,

$$Q_0 = A_y = B_y = \frac{P}{2} \text{ dir.}$$

$Q = \Delta Q \mp Q_0$  sonuç denkleminde 1. Terim ankastre mesnet momentlerin farkından dolayı oluşan kesme kuvvetidir. Bu değer bir uçta (+) iken diğer uçta doğal olarak (-) işaretlidir. Fakat mesnet reaksiyonu aksi bir durum olmadıkça yukarı doğru alınır. 2. terim ise kirişe etkiyen "P" tekil yükünden dolayı oluşan mesnet reaksiyonudur ki her iki mesnettede  $P/2$  değerinde olup yönü yukarı doğrudur.

Soru Bir ucu ankastre, diğeri ucu sabit mesnetli bir yayılı yükü bir kirişin mesnet ve aşılık momentlerinin hesabı



|            |                        |                  |
|------------|------------------------|------------------|
| $M_A$      | $\frac{qL^2}{8}$       | 0                |
| $Q_0$      | $\frac{qL}{2}$         | $\frac{qL}{2}$   |
| $\Delta Q$ | $\frac{qL}{8}$         | $-\frac{qL}{8}$  |
| $Q$        | $\frac{5}{8} \cdot qL$ | $\frac{3}{8} qL$ |

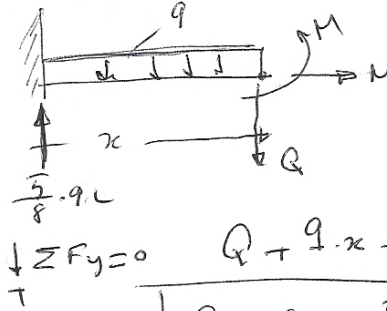
$$\Delta Q = \frac{\Delta M}{L} = \left( \frac{qL^2}{8} - 0 \right) / l = \frac{qL}{8}$$

$$Q = \Delta Q + Q_0$$

$$Q_{AB} = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{q \cdot L}{8} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L$$

x mesafesinin hesabı.

kirişi herhangi bir x mesafesinde keserek kesir kesir tesirlerine bakalım



$$\frac{5}{8} \cdot qL = \frac{q}{8} \cdot x$$

$$x = \frac{5}{8} \cdot L$$

$$\sum F_y = 0 \quad Q + \frac{3}{8} \cdot qL - \frac{5}{8} \cdot qL - qx = 0$$

$$Q = -qx + \frac{5}{8} \cdot qL$$

$$Q = 0 \quad \text{ix} \quad (0; \frac{5}{8} \cdot qL) \quad (x: y)$$

$$Q = 0 \quad \text{ix} \quad x = ?$$

$$0 = -qx + \frac{5}{8} \cdot qL$$

$$qx = \frac{5}{8} \cdot qL$$

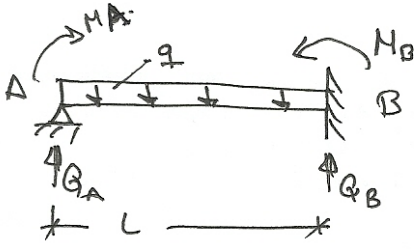
$$x = \frac{5}{8} \cdot L$$

$$F = \frac{5}{8} \cdot qL \cdot \frac{5}{8} \cdot L \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{128} \cdot q \cdot L^2$$

$$M_{qs} = -\frac{qL^2}{8} + \frac{25}{128} \cdot q \cdot L^2$$

$$= +\frac{9}{128} \cdot q \cdot L^2$$

Bir ucu basit, diğer ucu ankastre mesnetli ve düzgün yayılı yüklü kirişin mesnet reaksiyonlarının hesabı



$M_B = \text{ankastrelik moment.}$

$$M_A = 0$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{8} \quad (\text{ankastrelik moment tablosundan})$$

$$\sum M_A = q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - Q_B \cdot L - M_B$$

$$Q_B = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{M_B}{L} \quad \frac{\Delta M}{L} = \frac{0 - M_B}{L} = -\frac{M_B}{L}$$

$$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{8} \text{ ise.}$$

$$Q_B = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \frac{1}{L} = \frac{4 \cdot qL}{8} + \frac{qL}{8} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L$$

$$Q_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L \text{ olur}$$

Ö halde tek ağırlıklı bir ucu ankastre, diğer ucu serbest ve düzgün yayılı yüklü bir kirişin mesnet reaksiyonları şu şekilde olur.

$$Q_B = \frac{q \cdot L}{2} + \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \frac{1}{L} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L$$

$$Q_A = \frac{q \cdot L}{2} - \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \frac{1}{L}$$

$$Q_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Misal =  $q = 10 \text{ ton}$   $L = 10 \text{ m}$ .  $EI$  sabit

$$Q_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L = \frac{3}{8} \cdot 10 \cdot 10 = 37,5 \text{ ton.}$$

$$Q_B = \frac{5}{8} \cdot 10 \cdot 10 = 62,5 \text{ ton}$$

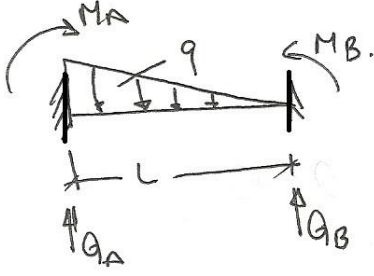
$$37,5 + 62,5 = 100 \text{ ton} = q \cdot L = 10 \cdot 10 = 100 \text{ ton.}$$

$$M_{a\check{s}} = -\frac{9}{128} q \cdot L^2$$

$$M_A = 0$$

$$M_B = -\frac{q \cdot L^2}{8} \quad \text{Tablodan}$$

## İki ucu ankastre üçgen yayılı yüklü kirişlerin mesnet reaksiyonu hesabı



$M_A$  ve  $M_B$  ankastrelik momentleridir  
 $M_A = \frac{q \cdot L^2}{20}$        $M_B = \frac{q L^2}{30}$

$$\sum M_A = M_A - M_B + \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{1}{3} L - Q_B \cdot L = 0$$

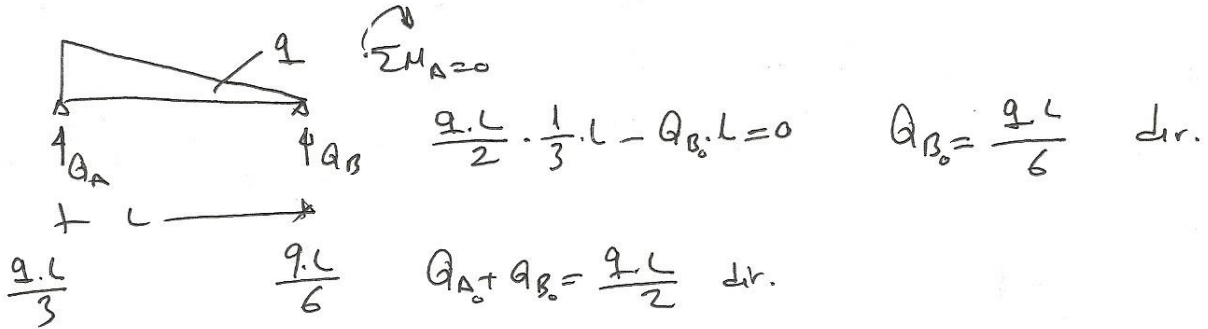
$$= M_A - M_B + \frac{q L^2}{6} - Q_B \cdot L$$

$$Q_B = \left( \frac{q L^2}{6} + M_A - M_B \right) \cdot \frac{1}{L}$$

$$Q_B = \left( \frac{q \cdot L}{6} + \frac{M_A - M_B}{L} \right) \text{ olur}$$

$Q_0 + \Delta Q$

### İzostatik esas sistemde mesnet reaksiyonu



$$Q_A = \frac{q L}{2} - \frac{q \cdot L}{6} = \frac{q L}{3} \text{ olur.}$$

Bu kirişin Ankastrelik momentleri Tablodan alınarak yerlerine konulursa

$$\Delta Q = \frac{M_A - M_B}{L} \Rightarrow \frac{\frac{q L^2}{20} - \frac{q L^2}{30}}{L} = \frac{q \cdot L}{20} - \frac{q \cdot L}{30} = \frac{3 q L}{60} - \frac{2 q L}{60} = \frac{q \cdot L}{60}$$

(3)      (2)

$$Q_A = Q_0 + \Delta Q = \frac{q \cdot L}{3} + \frac{q \cdot L}{60} = \frac{20 \cdot q \cdot L}{60} + \frac{q \cdot L}{60} = \frac{21}{60} \cdot q \cdot L = \frac{7}{20} \cdot q \cdot L \text{ olur}$$

(2)

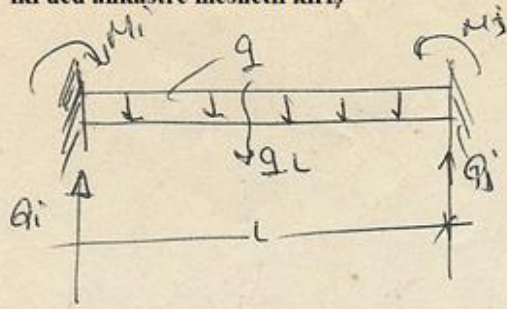
$$Q_B = Q_0 + \Delta Q = \frac{q \cdot L}{6} + \frac{q \cdot L}{60} = \frac{10 \cdot q \cdot L}{60} + \frac{q \cdot L}{60} = \frac{11 \cdot q \cdot L}{60} = \frac{11}{60} \cdot q \cdot L = \frac{3}{20} \cdot q \cdot L \text{ olur}$$

(1)

Bir açıklıklı hiperstatik kirişlere ait ankastrelik momentler tablosu bu ders notunun en sonunda verilmiştir.

## BİR AÇIKLIKLI HİPERSTATİK KİRİŞLERİN MESNET REAKSİYONU HESABI

iki ucu ankastre mesnetli kiriş



$$M_i = M_j$$

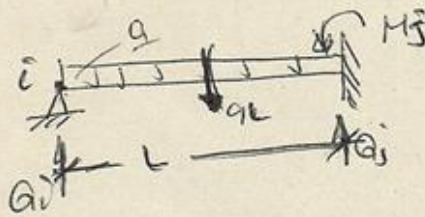
$$\sum M_i = M_i - M_j + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - Q_j \cdot L = 0$$

$$Q_j \cdot L = M_i - M_j + \frac{qL^2}{2}$$

$$Q_j = \frac{M_i - M_j}{L} + \frac{qL}{2} \Rightarrow Q_i = \frac{\Delta H}{L} + Q_0$$

①                      ②

Bir ucu basit, diğer ucu ankastre mesnetli kiriş

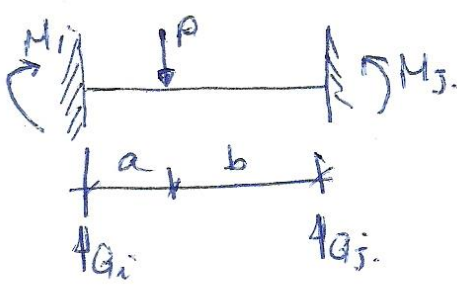


$$\sum M_i = -\frac{M_j}{L} + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - Q_j \cdot L = 0$$

$$Q_j \cdot L = -\frac{M_j}{L} + \frac{qL^2}{2}$$

$$Q_j = -\frac{M_j}{L} + \frac{qL}{2} \quad \text{alın}$$

**Tekil yükün kirişin ortasına etkimemesi durumu**

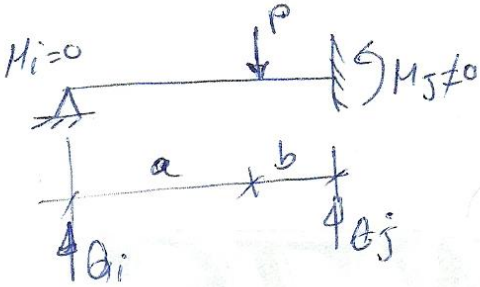


$$\sum M_i = M_i - M_j + P \cdot a - Q_j \cdot L = 0$$

$$Q_j = \frac{M_i - M_j}{L} + \frac{P \cdot a}{L}$$

$$Q_i = \frac{\Delta M}{L} + \frac{P \cdot b}{L} \quad \text{veya} \quad \frac{\Delta M}{L} + \frac{P \cdot (L-a)}{L}$$

**Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli kirişler**

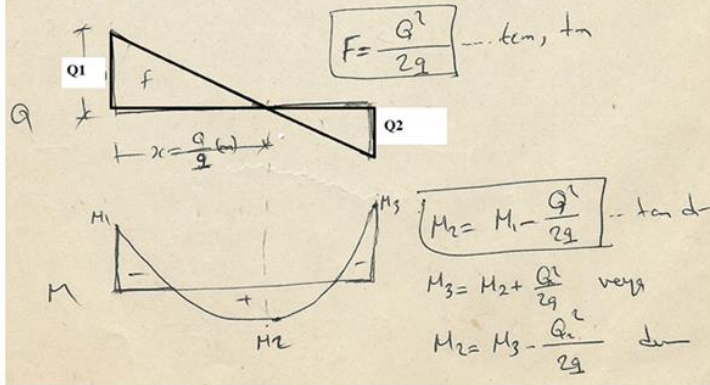


$$\sum M_A = -M_j + P \cdot a - Q_j \cdot L$$

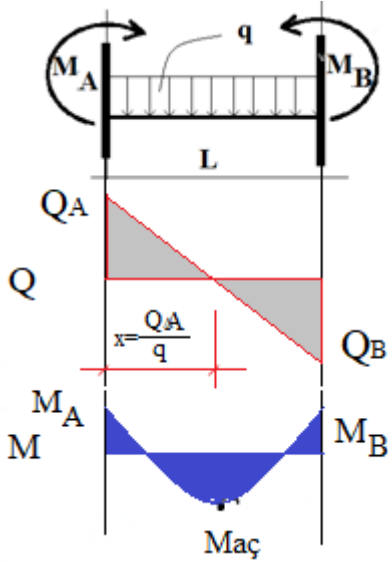
$$Q_j = \frac{P \cdot a}{L} + \frac{M_j}{L}$$

$$Q_i = \frac{P \cdot b}{L} + \frac{M_j}{L}$$

İki ucu ankastre mesnetli düzgün yayılı yüklü bir kirişin Q ve M diyagramı ilişkisi ve açıklık momenti hesabı.



## İki Ucu ankastre Mesnetli Tek Açıklıklı Kirişin Açıklık Momenti Hesabı



$$M_A = M_B = \pm \frac{q \cdot l^2}{12} \text{ kNm}$$

Tek açıklıklı bu kirişin ankastrelik momentleri olup tablolardan alınabilir. Sürekli kirişlerde ise dengelenmemiş momentlerdir. Bu kirişin kesme kuvveti ( $Q_A$  ve  $Q_B$ ) mesnet reaksiyonunu veren ifadeler daha önce hesaplanmıştı.

$$Q = \frac{q \cdot l}{2} \pm \frac{\Delta M}{L} \quad \Delta Q = \frac{M_A - M_B}{L} = 0 \quad Q_A = Q_0 = \frac{q \cdot L}{2} \text{ kN dur.}$$

Kesme kuvveti diyagramının alanı bize eğilme momentini veriyordu. Kesme kuvveti diyagramının soldaki üçgen alanını hesaplayalım.

$$Q_{alan} = M = \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q \cdot L^2}{8} \text{ kNm.}$$

A mesnetindeki ankastrelik moment  $M_A = \frac{q \cdot l^2}{12}$  olarak tablodan alınmıştı.

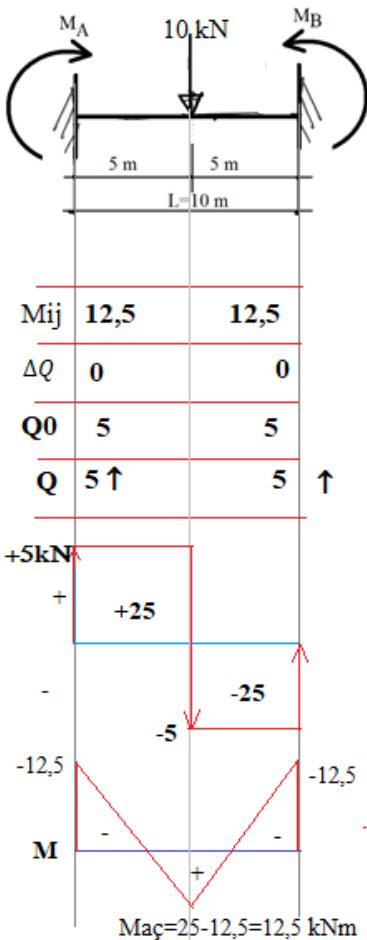
Dağıcılık yönteminden bilindiği gibi açıklık momentini hesaplamak için mesnet momentinden kesme kuvveti alanını çıkarırız.

$$M_{a\check{c}} = M_A - Q_{alan} \rightarrow M_{a\check{c}} = \frac{q \cdot l^2}{12} - \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{q \cdot L^2}{24} \text{ kNm olarak bulunur.}$$

Tek açıklıklı ve çeşitli şekilde yüklenmiş kirişlerin kesit tesirlerinin hesabı ve diyagramlarının çizimi daha önce öğrendiğimiz alan ve dağıcılık yöntemleri ile kolayca hesaplanabilir. Bunun için aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bir hesap tablosu hazırlanır. Bunu bir örnekte açıklayarak anlatalım.

### MİSAL:

Verilen tek açıklıklı bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kirişin kesit tesirlerini hesaplayıp diyagramlarını çiziniz.



$$M_{A-B} = \frac{P \cdot L}{8} \text{ tablodan alınır } M_{A-B} = \frac{10 \cdot 10}{8} = 12,5 \text{ kNm}$$

Kiriş altına çizilen tabloda hesaplanan ankastrelik momentler kirişin sol ve sağ uçlarına yazılır. Ankastrelik uç momentlerin farkından doğan kesme kuvveti hesaplanır.

$$\Delta M = \frac{M_A - M_B}{L} = 0 \quad \Delta Q = \frac{12,5 - 12,5}{10} = 0 \quad \text{kirişin sol ve sağ ucuna yazılır.}$$

$Q_0$  kiriş izostatik haldeyken hesaplanan reaksiyonlardır. Yani ortadan etkiyen tekil yük olduğuna göre

$$Q_0 = P/2 = 10/2 = 5 \text{ kN dur. Bu değerde kirişin uçlarına yazılır.}$$

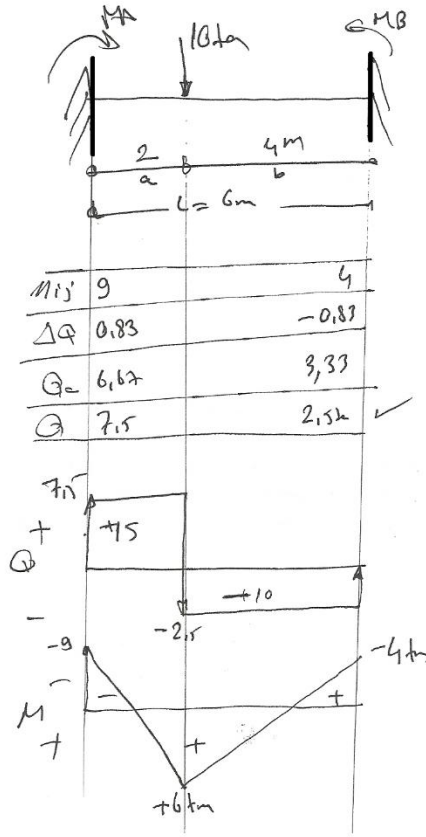
Kirişe ait mesnet reaksiyonu  $Q$  hesaplanabilir.

$$Q = \Delta Q \pm Q_0$$

$$Q = \frac{q \cdot l}{2} \pm \frac{\Delta M}{L} = 5 + 0 = 5 \text{ kN}$$

Grafikler bildik şekilde çizilir.

Verilen bir açıklıklı kirişin N,Q,M diyagramlarını çiziniz



$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^2} = 9 \text{ kNm}$$

$$M_B = \frac{P \cdot b \cdot a^2}{L^2} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 2^2}{6^2} = 4 \text{ kNm}$$

$$\Delta Q_i = \frac{9 - 4}{6} = 0.83 \text{ kN}$$

$$\Delta Q_j = \frac{4 - 9}{6} = -0.83 \text{ kN}$$

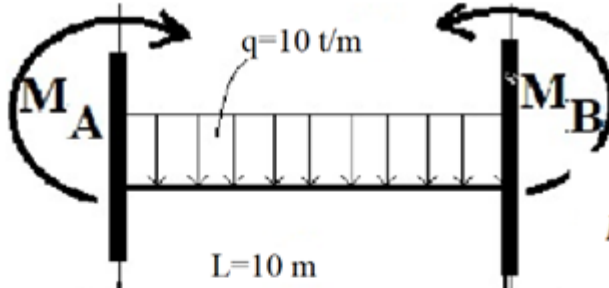
$$\sum M_A = 0$$

$$10 \cdot 2 = 6 V_B$$

$$\begin{matrix} V_B = 3.33 \text{ kN} \\ V_A = 6.67 \text{ kN} \end{matrix} \quad Q_i$$

$$\begin{aligned} Q_i &= 0.83 + 6.67 = 7.5 \text{ kN} \\ Q_j &= -0.83 + 3.33 = 2.5 \text{ kN} \end{aligned} \quad 10 \text{ kN} = P$$

Verilen iki ucu ankastre düzgün yayılı yüklü kirişin kesit tesir diyagramlarını çiziniz.



$$M_A = M_B = \frac{q \cdot L^2}{12} = \frac{10 \cdot 10^2}{12} = 83 \text{ tm}$$

ankastrelik momentler tablosundan alınır.

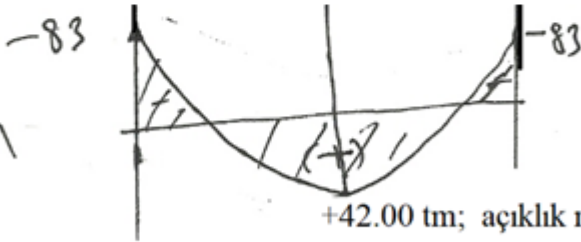
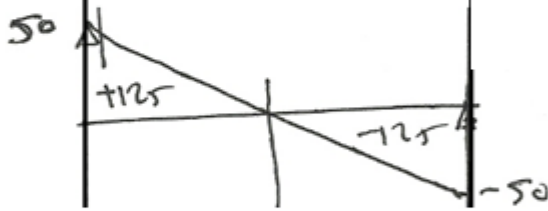
Misal:

|            |    |    |
|------------|----|----|
| $M_{ij}$   | 83 | 83 |
| $\Delta Q$ | 0  | 0  |
| $Q_0$      | 50 | 50 |
| $Q$        | 50 | 50 |

$\Delta Q = (M_i - M_j)/L$  Mesnet momentleri farkından oluşan kesme kuvveti izostatik esas sistemde MR

$$\Delta Q = \frac{\Delta M}{L} = \frac{83 - 83}{10} = 0$$

$$Q_0 = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ ton}$$



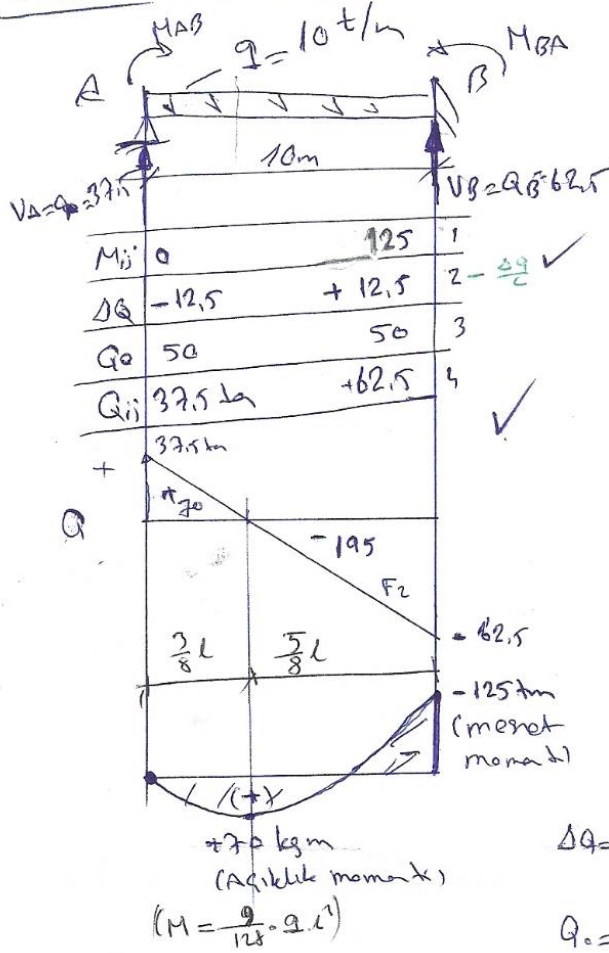
+42.00 tm; açıklık momentidir.

$$M_a = \frac{q \cdot L^2}{24} = \frac{10 \cdot 10^2}{24} = 41,66 \sim 42 \text{ tm}$$

Kesit tesirleri, MR hesaplandıktan sonra önce kesme kuvveti, daha sonra eğilme momenti dağılılık yöntemi diye öğretilen yöntemle çizilmiştir.

Misal

Bir ucu basit diğer ucu ankastre mesnetli bir açıklıklı kiriş



$$M_{AB} = 0 \text{ (basit mesnet)}$$

$$M_{BA} = \frac{qL^2}{8} = \frac{10 \cdot 10^2}{8} = 125 \text{ tm}$$

(Ankastre mesnet)

Kurall

- 1- Sol ucu (+), sağ ucu (-) işaretli tam ankastreli uc momentleri yazılır
- 2-  $(\frac{\Delta M}{L})$  cebirsel işaret yazılır (Sol ucu - sağ ucu)
- 3- İstediği sistemde mesnet reaksiyonları
- 4-  $(\Delta Q + Q_0)$  cebirsel toplam M2 verir.

$$\Delta Q = \frac{0 - 125}{10} = -12.5 \text{ ton}$$

$$Q_0 = \frac{qL}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ ton}$$

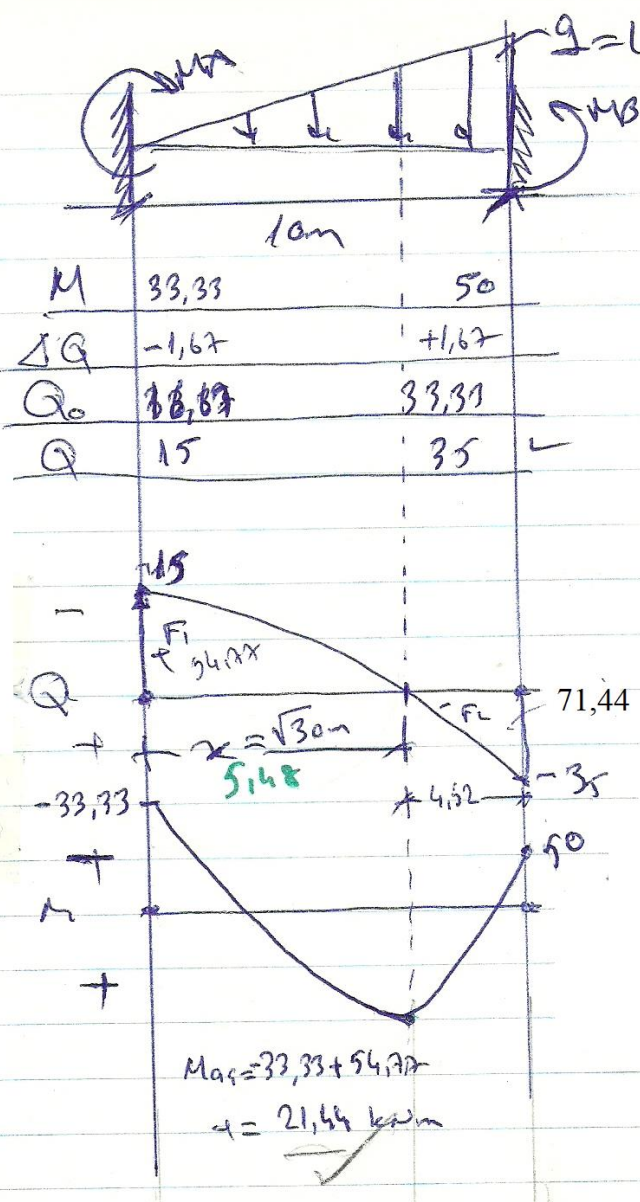
$$Q_i = (-12.5) + (50) = +37.5 \text{ ton}$$

$$Q_s = 12.5 + 50 = 62.5 \text{ ton}$$

$$M_{BA} = M_{AB} + (F_2)$$

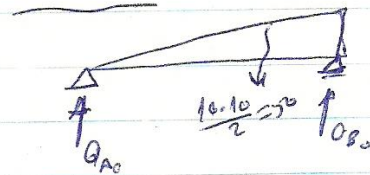
$$= 70 + (-195) = -125 \text{ tm}$$

Misal: İki ucu ankastre üçgen yayılı yüklü kirişin kesit tesir diyagramları



$$M_A = \frac{qL^2}{30} = \frac{10 \cdot 10^2}{30} = 33,33 \text{ kNm}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{20} = \frac{10 \cdot 10^2}{20} = 50 \text{ kNm}$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 10 Q_B$$

$$Q_B = 33,33 \text{ k}$$

$$q_x = \frac{q}{L} \cdot x = \frac{10}{10} x = x$$

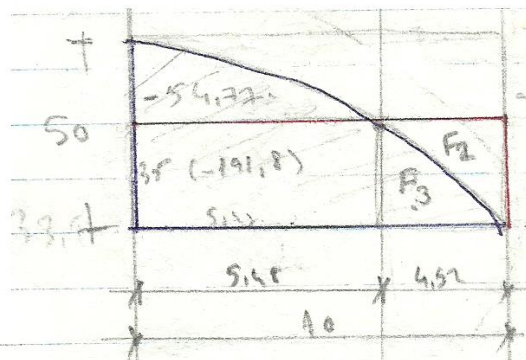
$$F_1 = 15$$

$$15 = x \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = 15 \Rightarrow x = \sqrt{30} \text{ m}$$

$$x = 5,48 \text{ m}$$

$$F_1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{30} \cdot 15 = 54,77 \text{ kNm}$$



dis. kavg.

$$F = a \cdot b \cdot \frac{2}{3} = 50 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} = 333,33 \text{ k}$$

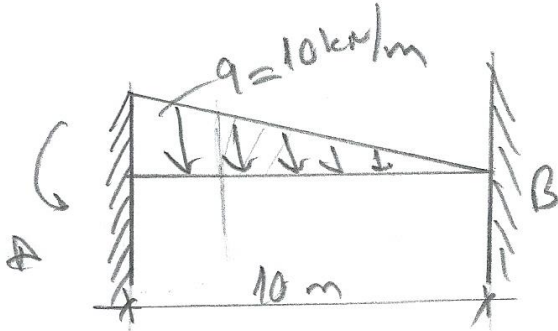
$$F_3 = 333,33 - (191,8 + 54,77) = 86,76 \text{ kNm}$$

$$F_2 = (35 \times 4,52) - 86,76 = 71,44 \text{ kNm}$$

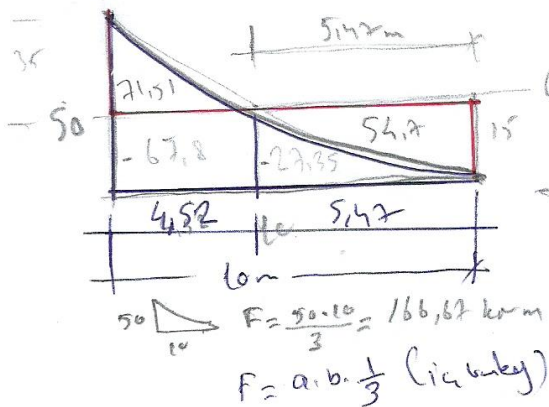
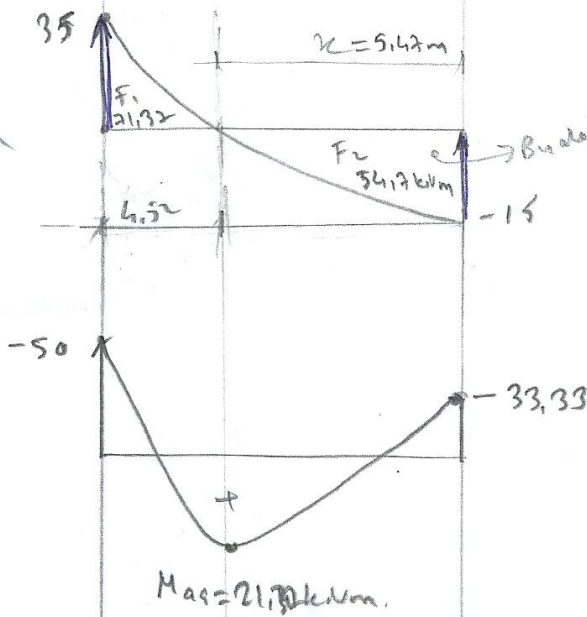
$$F = a \cdot b \cdot \frac{2}{3}$$

$$F = a \cdot b \cdot \frac{1}{3}$$

İki ucu ankastre tiçgen yayılı yüklü kiriş

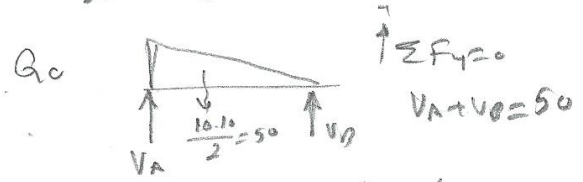


|     |       |        |
|-----|-------|--------|
| Mis | 50    | 33,33  |
| ΔQ  | 1,667 | -1,667 |
| Qo  | 33,33 | 16,67  |
| Q   | 35    | 15     |



$$M_A = \frac{qL^2}{20} = \frac{10 \cdot 10^2}{20} = 50 \text{ kNm}$$

$$M_B = \frac{qL^2}{30} = \frac{10 \cdot 10^2}{30} = 33,33 \text{ kNm}$$



$$\sum F_y = 0 \quad V_A + V_B = 50$$

$$\sum M_A = 0 \quad 50 \cdot \frac{10}{3} = 10 V_B$$

$$V_B = 16,67 \text{ kN}$$

$$V_A = 33,33 \text{ kN}$$

Bu alardan faydalanarak  
Max. Moment  $x$  in hesap

$$q_x = \frac{q}{L} \cdot x$$

$$q_x = \frac{10}{10} \cdot x = x$$

$$F = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = 15 \rightarrow x = 5,42 \text{ m}$$

$$M_{qs} = -33,33 + F_2 \quad F_2 = \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 5,42$$

$$= -33,33 + 54,2$$

$$F_2 = 54,2 \text{ kNm}$$

$$M_{qs} = 21,32 \text{ kNm}$$

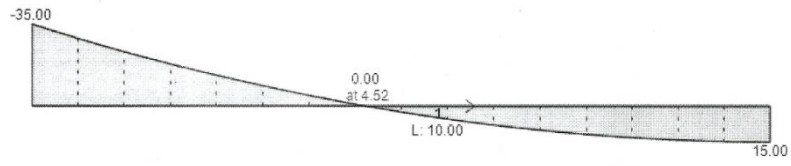
Q alanları geometrik olarak hesaplanabilir.

$$F = a \cdot b \cdot \frac{2}{3} \text{ (üst kısıy)}$$

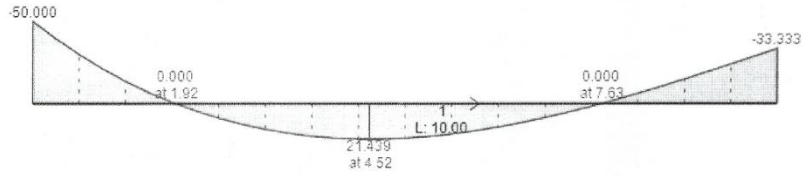
$$F = a \cdot b \cdot \frac{1}{3} \text{ (alt kısıy)}$$

Bir önceki örneğin EngiLab Beam.2D 2018 Lit paket programıyla çözülmüş hali.  
Sizde internette bu programı indirebilir ve kullanabilirsiniz.

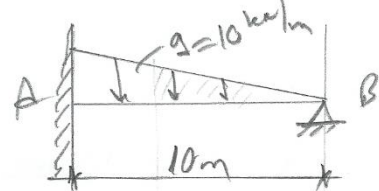
Shear Force Diagram [V]



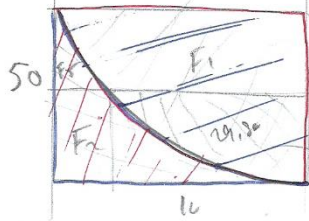
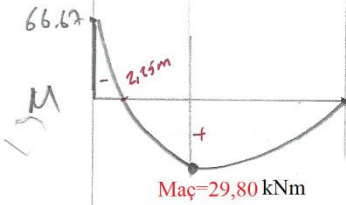
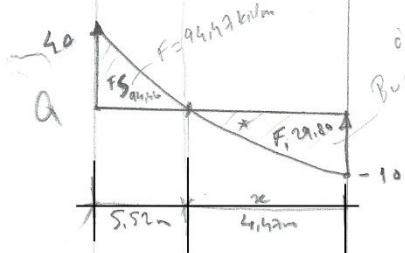
Bending Moment Diagram [M]



Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli ve üçgen yayılı yüklü kiriş



|            |       |       |
|------------|-------|-------|
| $M_A$      | 66,67 | 0     |
| $\Delta q$ | 6,67  | -6,67 |
| $Q_0$      | 33,33 | 16,67 |
| $Q$        | 40    | 10    |



$\Delta F = \frac{2}{3} q \cdot b$   
 $\Delta F = \frac{1}{3} q \cdot b$

$$M_A = \frac{2}{3} q L^2 = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 10^2 = 66,67 \text{ kNm}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A + V_B = 50$$

$$\sum M_A = 0$$

$$50 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 = 10 V_B$$

$$V_B = 16,67 \text{ kN}$$

$$V_A = 50 - 16,67 = 33,33 \text{ kN}$$

$$q_x = \frac{q}{L} x$$

$$q_x = \frac{10}{10} x$$

$$q_x = x$$

$$F = \frac{x^2}{2}$$

$$10 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 4,47 \text{ m}$$

$$F_1 = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4,47 = 29,80 \text{ kNm}$$

$$F = 50 \times 10 = 500 \text{ kNm}$$

$$F_1 = \frac{2}{3} \times 50 \times 10 = 333,33 \text{ kNm}$$

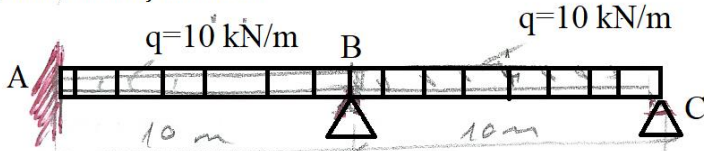
$$F_2 = 500 - 333,33 = 166,67 \text{ kNm} \left( = 0,5 \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$F_3 = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4,47 = 29,80 \text{ kNm}$$

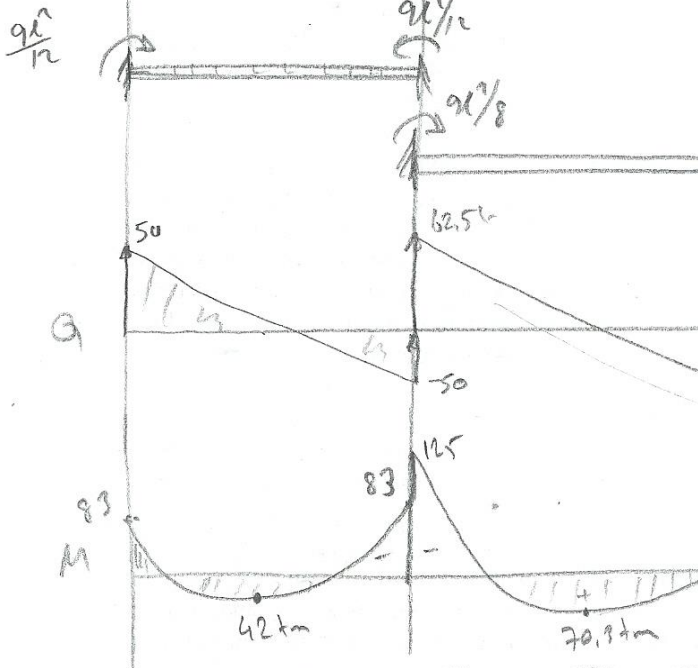
$$F_{12} (10 \times 10) = 29,80 = 70120$$

$$F_5 = 166,67 - 29,80 = 136,87 \text{ kNm}$$

İki açıklıklı sürekli bir kirişin moment dengeleme yöntemi ve dağılık yöntemi ile kesit tesir diyagramlarının çizilmesi.

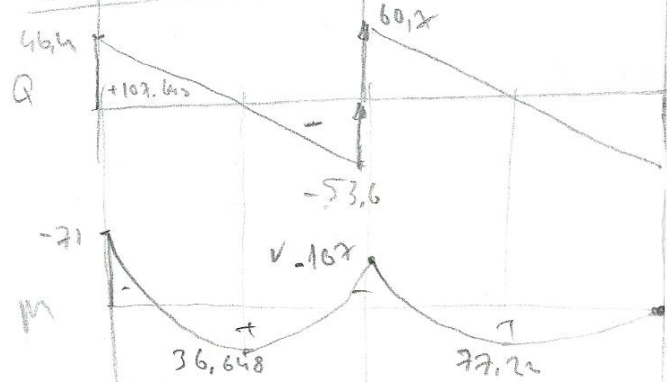


|            |     |     |       |       |
|------------|-----|-----|-------|-------|
| M          | +83 | -83 | +125  | 0     |
| $\Delta Q$ | 0   | 0   | +12,5 | -12,5 |
| $Q_0$      | 50  | 50  | 50    | 50    |
| Q          | 50  | 50  | 62,5  | 37,5  |



|                  |     |      |      |     |
|------------------|-----|------|------|-----|
| K                | 0   | 0,57 | 0,43 | 1,0 |
| $M_{\text{fix}}$ | +83 | -83  | +125 | 0   |
|                  | -12 | -24  | -18  | 0   |

|            |      |      |       |       |
|------------|------|------|-------|-------|
| $\Sigma M$ | +71  | -107 | +107  | 0     |
| $\Sigma M$ | +71  | -107 | +107  | 0     |
| $\Delta Q$ | -3,6 | +3,6 | +10,7 | -10,7 |
| $Q_0$      | +50  | +50  | +50   | +50   |
| Q          | 46,4 | 53,6 | 60,7  | 39,3  |



Redörler AB açıklığı  $I/L$  ve BC açıklığı  $0,75 I/L$

I, kiriş atalet momenti olup 1 (sabit) alınabilir.

$$M_{AB} = \frac{qL^2}{12} = 83 \text{ kNm} \text{ AB kirişi}$$

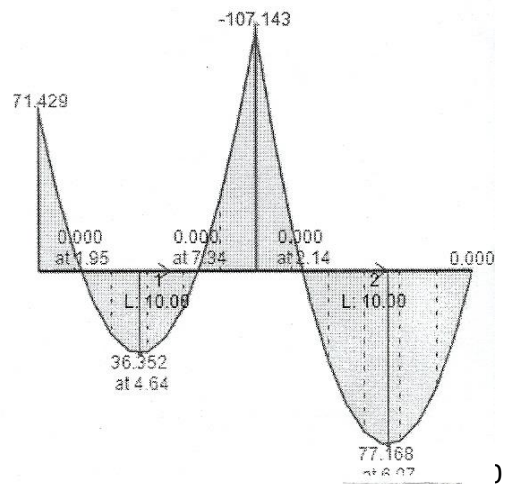
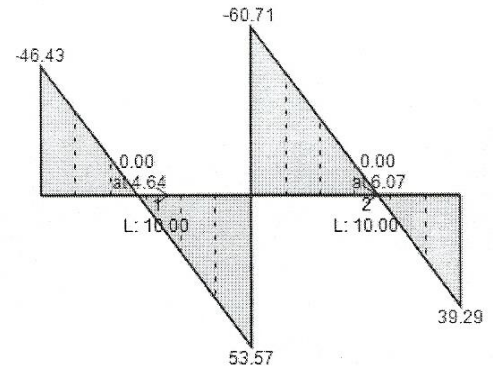
$$M_{CB} = \frac{qL^2}{8} = 125 \text{ kNm} \text{ BC kirişi}$$

$$\Delta Q = \frac{83 - 37}{10} = 4,6$$

$$\Delta Q = \frac{125 - 0}{10} = 12,5 \text{ kN}$$

$$\frac{Q^2}{2L} = \frac{37,5^2}{2 \times 10} = 70,3 \text{ kNm}$$

$$\frac{Q^2}{2L} = \frac{12,5^2}{2 \times 10} = 15,6 \text{ kNm}$$



| ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ |                       |                       |                                   |                         |  |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-------------------------|--|
| İKİ UCU ANKASTRE KİRİŞLER |                       |                       | BİR UCU ANKASTRE-BİR UCU MAFSALLI |                         |  |
| Yükleme Şekli             | $\bar{M}_{AB}$        | $\bar{M}_{BA}$        | Yükleme Şekli                     | $\bar{M}_{AB}$          |  |
|                           | $\frac{q.L^2}{12}$    | $\frac{q.L^2}{12}$    |                                   | $\frac{q.L^2}{8}$       |  |
|                           | $\frac{q.L^2}{20}$    | $\frac{q.L^2}{30}$    |                                   | $\frac{2.q.L^2}{3}$     |  |
|                           | $\frac{5.q.L^2}{96}$  | $\frac{5.q.L^2}{96}$  |                                   | $\frac{7.q.L^2}{120}$   |  |
|                           | $\frac{P.a.b^2}{L^2}$ | $\frac{P.b.a^2}{L^2}$ |                                   | $\frac{5.q.L^2}{64}$    |  |
|                           | $\frac{P.L}{8}$       | $\frac{P.L}{8}$       |                                   | $\frac{Pab(L+b)}{2L^2}$ |  |
|                           | $\frac{Pa(L-a)}{L}$   | $\frac{Pa(L-a)}{L}$   |                                   | $\frac{3.P.L}{16}$      |  |
|                           | $\frac{2.P.L}{9}$     | $\frac{2.P.L}{9}$     |                                   | $\frac{3Pa(L-a)}{2.L}$  |  |
| $r = l/L$                 |                       |                       | $r = 0.75 l/L$                    |                         |  |

MESNET VE YÜKLEME ÇEŞİDİNE GÖRE DAHA FAZLA KIRIS ELDE EDİLEBİLİR.