

GEOMETRİK TOPOLOJİ

Prof. Dr. İsmet KARACA

Ders Notları

İçindekiler

1	MANİFOLDLAR	4
1.1	Manifold	4
1.2	Diferensiyellenebilir Yapılar	5
1.3	Diferensiyellenebilir Fonksiyon	6
1.4	Tanjant Uzayı	8
1.5	Alıştırmalar	9
2	YÜZEYLER	11
2.1	Kulplu Yüzeyler(Handled Surfaces)	11
2.2	Çapraz Yüzeyler(Cross Cap Surfaces)	12
2.3	Yönlü Yüzeyler(Orientable Surfaces)	13
3	YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI	14
3.1	Bağıntılı Toplam(Topolojik Toplam) (Connected Sum)	14
3.2	Kompakt Yüzeylerin Sınıflandırılması	15
3.3	Kompakt Yüzeylerin Üçgenleştirilmesi	15
3.4	Euler Karakteristiği	18
3.5	Yüzeyler Cebiri	22
3.6	Ekli Uzaylar	23
3.7	Alıştırmalar	24
4	TOPOLOJİK GRUPLAR, GRUP HAREKETİ, LİE GRUPLARI	26
4.1	Topolojik Gruplar	26
4.2	Grup Hareketi ve Orbit Uzayları	35
4.3	Lie Grupları	37
4.4	Lie Cebirleri	39
4.5	Alıştırmalar	39

5	SİMPLEKSLER	41
5.1	Affine Uzaylar	41
5.2	Simplisiyal Kompleksler	51
6	SİMLİSİYAL HOMOLOJİ GRUPLARI	55
6.1	Serbest Abel Gruplar	55
6.2	Simplisiyal Zincir Kompleksler	57
6.3	Simplisiyal Homoloji Grupları	59
6.4	Simplisiyal Kompleksin Euler Karakteristiği	70
6.5	Homoloji ve Simplisiyal Dönüşümler	72
7	DÜĞÜM TEORİSİ	73
7.1	Düğüm, Zincirler, Diyağramlar	74
7.2	Reidemeister Hareketleri	80
7.3	Düğüm Renklendirme	81
7.4	Düğüm Renklendirmesine Sistematik Yaklaşım	83
7.5	Aynalar VE Düzüm Kodlaması	85
7.5.1	Düzüm Kodlaması	86
7.6	Alexander Polinomu	87
7.7	Düzüm Toplamları	88
7.8	DNA'ya Kısa Bakış	89
7.9	Tangle	90
7.10	Tangle İşlemleri	92
7.11	4-Plat	94
7.12	Tangle Denklemlerinin Çözümü	96
7.13	Özel Bölge Rekombinasyonu	97
7.14	Tangle Modeli	98
7.15	Örnek	99

Şekil Listesi

1.1	Koordinat Dönüşümü	5
1.2	diferansiyellenebilir fonksiyon	7
1.3	diferansiyellenebilir fonksiyonların bileşkeleri de diferansiyelle- nebilir.	8
2.1	Küre 0-kulpludur	11
2.2	Tor 1-kulpludur	11
2.3	2-kulplu	11
2.4	g-kulplu	11
2.5	$\mathbb{R}P^2$ 1-çapraz yüzeydir.	12
3.1		14
3.2	$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx Kb$	15
3.3	Torun iki farklı üçgenleştirilmesi	15
3.4	Projektif düzlemin üçgenleştirilmesi	16
3.5	Küpün üçgenleştirilmesi	16
3.6	Kürenin üçgenleştirilmesi	17
3.7	$\mathbb{R}P^2 \# T$	17
3.8	$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$	18
3.9	$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$	18
3.10	$S^1 \# S^1$	22
3.11	Koni dönüşümü	23
3.12	Süspansiyon	24
3.13	Silindir dönüşümü	24
7.1	trefoil düğümü- sekiz düğümü -kare düğümü	75
7.2	hoph zinciri- whitehead zinciri - borromean zinciri	76
7.3	uygun çaprazlama-kötü çaprazlama	76
7.4	4_1 ve 3_1	77
7.5	Tangle Örnekleri a.Rasyonel b.Aşıkâr c.Asal d.Yerel Düğüm- lenmiş	91
7.6	4-plat çizimi	95

Bölüm 1

MANİFOLDLAR

1.1 Manifold

Tanım 1.1.1. (Manifold)

M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan M topolojik uzayına "n-boyutlu topolojik manifold" denir.

- M bir Hausdorff uzayıdır.
- M topolojik uzayının sayılabilir bazı vardır.
- Yerel homeomorfiktir:

$$\boxed{\forall p \in M \text{ için } \exists U_p \subseteq M \text{ açık var öyle ki } h_p : U_p \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n \\ \text{homeomorfizmdir. } (U', \mathbb{R}^n \text{'nin açık altkümesidir.)}}$$

Burada $\forall p \in M$ için (h_p, U_p) ikilisine M nin haritası ve $\{(h_p, U_p)\}_{p \in M}$ ailesine ise M nin atlası denir.

Örnek 1.1.1.

1. $\mathbb{R}^n$ 'nin kendisi, n -manifolddur. Gerçekten $\mathbb{R}^n$, Hausdorff, sayılabilir bazı var ve birim dönüşümü yerel homeomorfizmadır. (Bağlantılı fakat kompakt değil.)
2. S^n , n -manifolddur. (Hem bağlantılı hem kompakt)
3. $Kb, Mb, Tor, \mathbb{R}P^2, S^2$, 2-manifolddur.

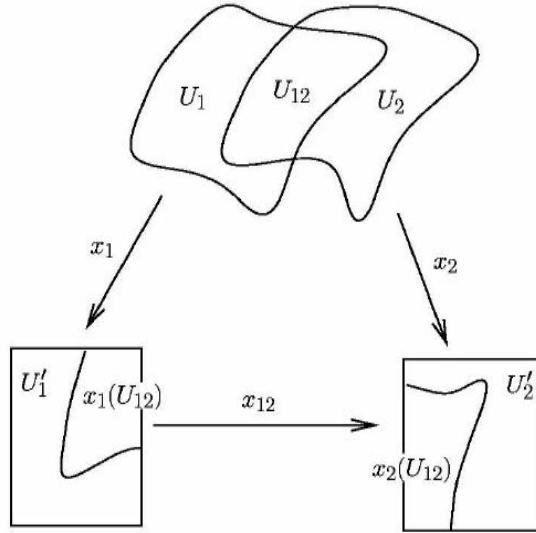
Özellikler 1.1.1.

1. Bir n -manifoldun açık alt kümesi bir n -manifolddur.
2. M m -manifold ve N n -manifold ise $M \times N$ ($m + n$)-manifolddur.
3. Bir n -manifold ya bağlantılı ya da bağlantısız, ya kompakt ya da kompakt değildir.
4. Her n -manifold yerel kompakttır.

1.2 Diferensiyellenebilir Yapılar

Tanım 1.2.1. (Koordinat Dönüşümü)

M topolojik n -manifold olsun. $x_1 : U_1 \longrightarrow U'_1$ ve $x_2 : U_2 \longrightarrow U'_2$ iki çizelge olsun öyleki $U_1 \cap U_2 = U_{12} \neq \emptyset$ olsun. $x_{12} = x_2 \circ x_1^{-1}|_{x_1(U_{12})}$ ve



Şekil 1.1: Koordinat Dönüşümü

$x_{21} = x_{12}^{-1} = x_1 \circ x_2^{-1}|_{x_2(U_{12})}$
dönüşümlerine koordinat dönüşümü denir.

Topolojik Uzayın tüm harita dönüşümleri diferansiyellenebilir ise manifold diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 1.2.2. (Diffeomorfizm) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ açık olmak üzere, $f : U \longrightarrow V$ ve $f^{-1} : V \longrightarrow U$ fonksiyonları diferansiyellenebilirdir ise f 'ye diffeomorfizm denir.

Örnek 1.2.1.

1. S^n diferansiyellenebilir n -manifolddur.
2. $\mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir n -manifolddur.

1.3 Diferansiyellenebilir Fonksiyon

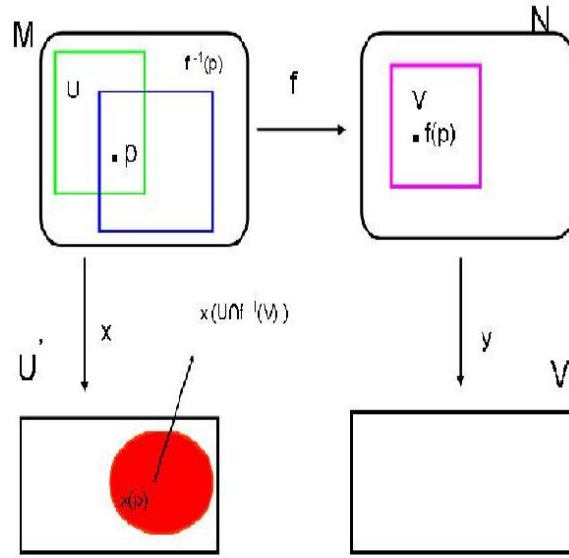
Tanım 1.3.1. (Diferansiyellenebilir Fonksiyon)

(M, θ) ve (N, θ) diferansiyellenebilir manifoldlar olsun. $p \in M$ olmak üzere $f : M \longrightarrow N$ sürekli fonksiyon ve $p \in U \subseteq M$ açık $f(p) \in V \subseteq N$ açık olmak üzere $x : U \longrightarrow U'$ ve $y : V \longrightarrow V'$ harita dönüşümleri için

$$y \circ x \circ f^{-1} \Big|_{x(U \cap f^{-1}(V))} = x(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow V'$$

fonksiyonu $x(p)$ noktasında diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna p noktasında diferansiyellenebilir fonksiyon denir. f fonksiyonu $\forall p \in M$ noktasında diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna diferansiyellenebilir fonksiyon denir.

Örnek 1.3.1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad p \longmapsto p^3$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığından f fonksiyonu diferansiyellenebilir değildir.



Şekil 1.2: diferansiyellenebilir fonksiyon

Örnek 1.3.2. • $g : \mathbb{R} \mapsto S^1 \quad p \mapsto (\cos p, \sin p)$ her noktada diferansiyellenebilir olduğundan g fonksiyonu diferansiyellenebilir.

Uyarı 1.3.1. Diferansiyellenebilirlik haritalara bağlı değildir. Çünkü $y \circ f \circ x^{-1}$ diferansiyellenebilir ise başka bir $X : U \longrightarrow U'$ harita ve $Y : V \longrightarrow V'$ harita olsa

$$Y \circ f \circ X^{-1} = (Y \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ X^{-1})$$

de diferansiyellenebilirdir.

Teorem 1.3.1. $f : (M, \theta) \longrightarrow (N, \phi)$ ve $g : (N, \phi) \longrightarrow (P, \omega)$ diferansiyellenebilir fonksiyon ise $g \circ f : (M, \theta) \longrightarrow (P, \omega)$ da diferansiyellenebilirdir

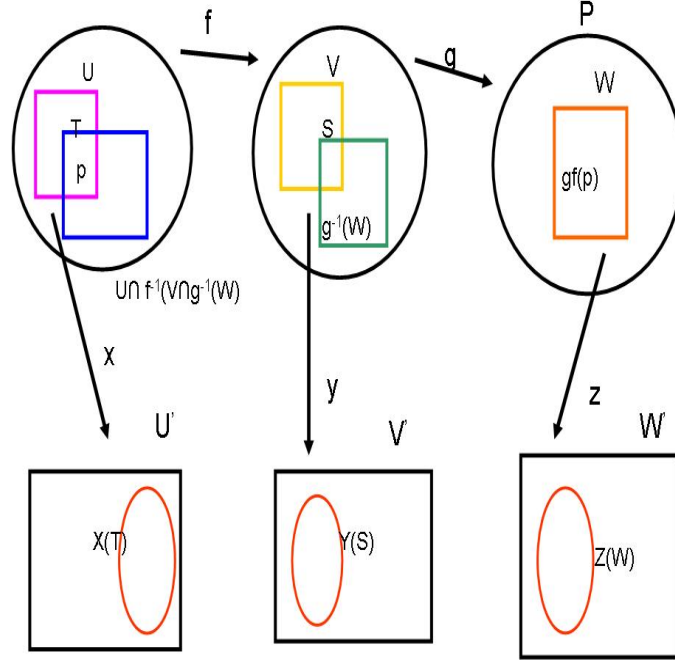
İspat 1.3.1. $x : U \longrightarrow U' \quad x \in \theta \quad p \in U$ haritası

$y : V \longrightarrow V' \quad y \in \phi \quad f(p) \in V$ haritası

$z : W \longrightarrow W' \quad z \in \omega \quad gf(p) \in W$ haritası olmak üzere

$T = U \cap f^{-1}(V \cap g^{-1}(W))$ alalım.

$g \circ f = h : z \circ g \circ f \circ x^{-1} \Big|_{x(T)} = (z \circ g \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1})$ diferansiyellenebilir.



Şekil 1.3: diferensiyellenebilir fonksiyonların bileşkeleri de diferensiyellenebilir.

1.4 Tanjant Uzayı

Tanım 1.4.1. (Tanjant Uzayı)

M diferansiyellenebilir manifold. $p \in M$ olsun. $Curves_p M = \{\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayı olsun. $\alpha, \beta \in Curves_p M$ alalım.

$\alpha \approx_p \beta$ p noktasında tanjanttır. $\iff p \in U \subseteq M$ açık $\theta : U \rightarrow U'$

hom.

için $(\theta \circ \alpha)'(0) = (\theta \circ \beta)'(0)$

Buradan ; $T_p M =_p M \approx_p$ dir

Teorem 1.4.1. Denklik sınıfları haritalara bağlı değildir.

İspat 1.4.1. $\alpha \approx_p \beta$ olsun. $p \in U \subseteq M$ $\theta : U \rightarrow U'$ ve $p \in V \subseteq M$ $\psi : V \rightarrow V'$ iki ayrı harita iseler ;
 $(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ \alpha)'(0)$
 $= [(\psi \circ \theta^{-1})' \circ (\theta \circ \alpha)] \circ [(\theta \circ \alpha)'(0)]$

$$\begin{aligned}
&= [(\psi \circ \theta^{-1})' \circ (\theta \circ \beta)] \circ [(\theta \circ \beta)'(0)] \\
&= (\psi \circ \beta)'(0)
\end{aligned}$$

$T_p M$ tanjant uzayına vektör yapısı koyalım. (U, θ) ; p merkezli çizelge ve $n = \dim(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\theta_* : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
[\alpha] &\longmapsto (\theta \circ \alpha)'(0)
\end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

- ϕ_* iyi tanımlı ve bire-bir dir.
- $+: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $([\alpha], [\beta]) \longmapsto [\alpha] + [\beta] = \phi_*^{-1}(\phi_*[\alpha] + \phi_*[\beta])$
- $*: \mathbb{R}^n \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $(\lambda, [\alpha]) \longmapsto \lambda * [\alpha] = \phi_*^{-1}(\lambda \phi_*[\alpha])$

işlemleri altında $(T_p M, \mathbb{R}^n, +, *)$ vektör uzay yapısına sahiptir.

1.5 Alıştırırmalar

1. $\mathbb{R}^n$ de her U açığı topolojik n-manifolddur. Gösteriniz.
2. Birinci sorudan hareketle bir topolojik n-manifoldun her açık altkümesi de (alt uzay topolojisine göre) topolojik n-manifold olabilir mi? Yorumlayınız.
3. S^2 topolojik 2-manifold dur . Gösteriniz.
4. S^1 topolojik 1-manifolddur . Gösteriniz.
5. X topolojik uzayı kompakt, Hausdorff ve yerel homeomorfik ise X uzayının sayılabilir bazı vardır (yani X ikinci sayılabilir uzaydır). Gösteriniz. Buradan hareketle $I = [0, 1]$ kapalı aralığı topolojik 1-manifold olabilir mi? Yorumlayınız.

6. M bir topolojik m -manifold , N bir topolojik n - manifold ise gösteriniz ki $M \times N$ de topolojik $(m + n)$ - manifolddur . (Yani manifoldların kartezyen çarpımı da manifolddur).
7. $X = S^1 \times I$ silindirin topolojik 2 -manifold olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme : 4,5,6 ıncı sorulardan yararlanınız.)
8. $\mathbb{R}P^2$ reel projektif düzleminin topolojik 2-manifold olduğunu gösteriniz.
9. S^2 diferensiyellenebilir manifolddur. Gösteriniz.
10. $\mathbb{R}P^1$ ve S^1 diffeomorfik midirler? Açıklayınız.
(yol gösterme : $e^{i\theta} \longmapsto [e^{i\frac{\theta}{2}}]$)

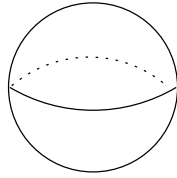
Bölüm 2

YÜZEYLER

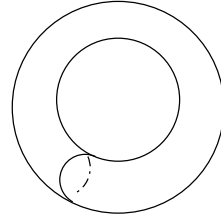
Tanım 2.0.1. Kompakt, bağlantılı 2-manifolda bir yüzey denir.

Örnek 2.0.1. Silindir, paraboloid, kürenin kulpları çıkartılarak elde edilen yüzey.

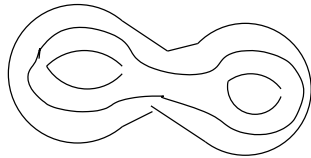
2.1 Kulplu Yüzeyler(Handled Surfaces)



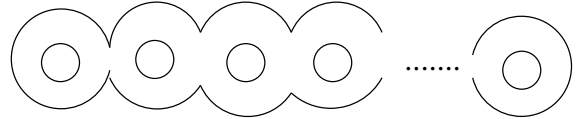
Şekil 2.1: Küre 0-kulpludur



Şekil 2.2: Tor 1-kulpludur



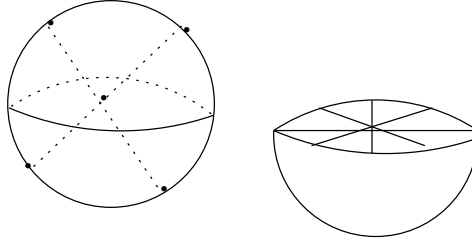
Şekil 2.3: 2-kulplu



Şekil 2.4: g-kulplu

Tanım 2.1.1. S_g ailesinin g -inci elemanına g genuslu yüzey denir.

2.2 Çapraz Yüzeyler(Cross Cap Surfaces)



Şekil 2.5: $\mathbb{R}P^2$ 1-çapraz yüzeydir.

Tanım 2.2.1. $C_1, C_2, \dots, C_g$ ailesinin g -inci elemanına g çapraz yüzey denir.

2.3 Yönlü Yüzeyler(Orientable Surfaces)

Tanım 2.3.1. S bir yüzey olsun.

1. S ye ait her kapalı eğri yönünü koruyorsa S ye yönlü yüzey denir
2. S yüzeyi üzerinde yönü değiştiren en az bir kapalı eğri varsa S ye yönlü olmayan yüzey denir

Örnek 2.3.1. S^2, T , silindir yönlü yüzeylerdir. $Kb, Mb, \mathbb{R}P^2$ yönlü olmayan yüzeylerdir.

1. $T \approx S^1 \times S^1$
2. $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : [(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2]^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

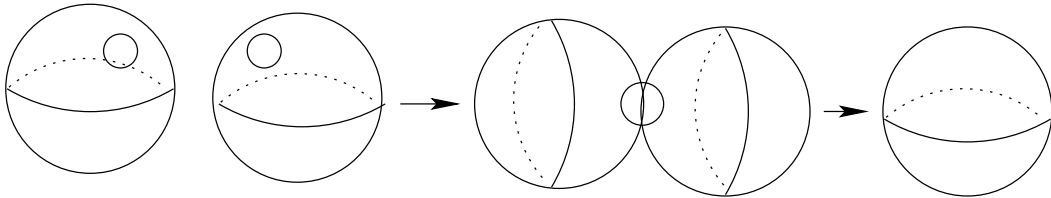
Bölüm 3

YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

3.1 Bağıntılı Toplam(Topolojik Toplam) (Connected Sum)

Tanım 3.1.1. S_1 ve S_2 iki yüzey olsun. Bu iki yüzeyden birer disk çıkartılsın ve çıkartılan kısımda bu iki yüzeyin yapıştırılmasıyla elde edilen yeni yüzeye S_1 ve S_2 nin bağıntılı toplamı denir.

Örnek 3.1.1. $S^2 \# S^2 \approx S^2$

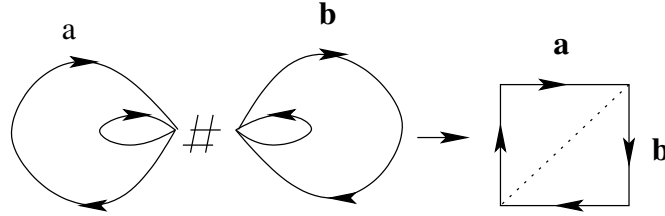


Şekil 3.1:

- Özellikler 3.1.1.**
1. $S_1 \# S_2 \approx S_2 \# S_1$
 2. $(S_1 \# S_2) \# S_3 \approx S_1 \# (S_2 \# S_3)$
 3. İki yönlü yüzeyin bağıntılı toplamı yine yönlü yüzeydir.
 4. S_1 ve S_2 herhangi biri yönlü değilse $S_1 \# S_2$ yönlü değildir.

3.2 Kompakt Yüzeylerin Sınıflandırılması

Teorem 3.2.1. Bir kompakt yüzey ya küreye ya tora ya da $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx Kb$ ya homeomorfdur.



Şekil 3.2: $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx Kb$

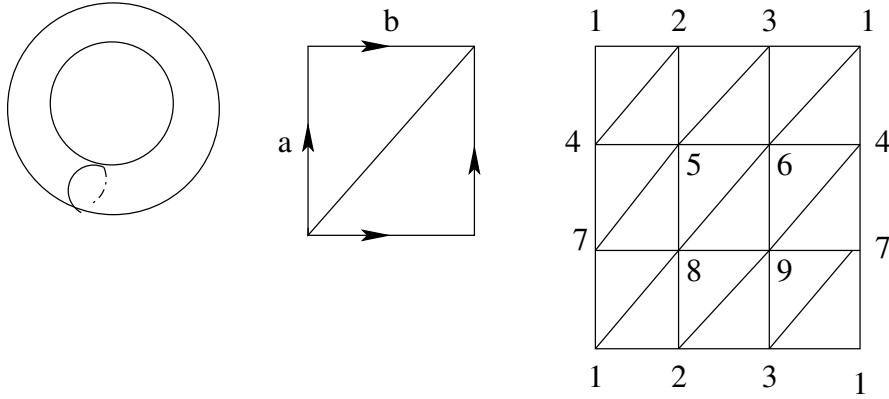
$$\pi_1(Kb) = \{\langle a, b \rangle : aba^{-1}b = 1\}$$

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \{\langle a, b \rangle : abab = 1\}$$

3.3 Kompakt Yüzeylerin Üçgenleştirilmesi

Tanım 3.3.1. S kompakt yüzey olsun. S nin üçgenleştirilmesi S yi kaplayan $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ kapalı alt kümelerinin sonlu ailesini içerir öyle ki T_i ler $\mathbb{R}^2$ deki kapalı üçgenlere homeomorfdur.

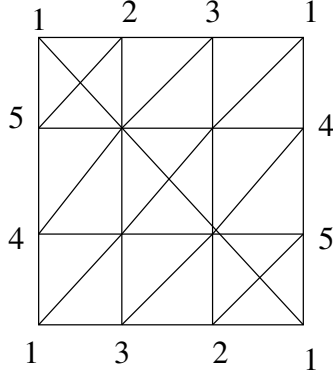
Örnek 3.3.1. 1. Torun üçgenleştirilmesi



Şekil 3.3: Torun iki farklı üçgenleştirilmesi

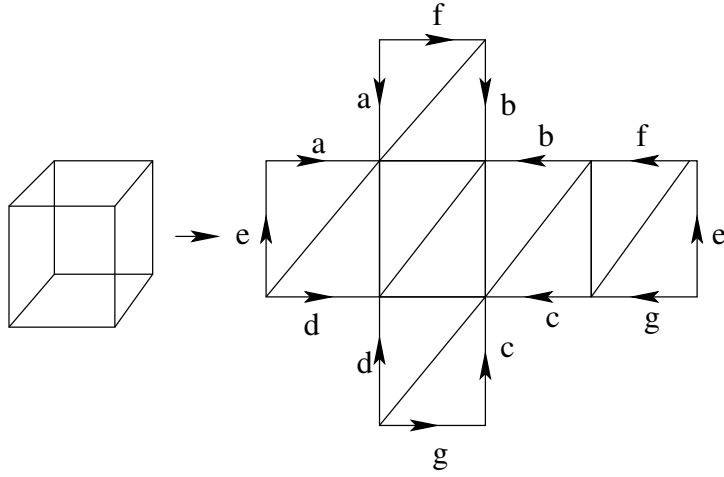
Kareyi üçgenleştiriyoruz. Farklı şekillerde üçgenleştirebiliriz.

(a) ve (b) durumuda torun üçgenleştirilmesidir. Yaptığımız üçgenleştirme ile sadece sonraki işlemlerimiz değişecektir.



Şekil 3.4: Projektif düzlemin üçgenleştirilmesi

2. Projektif düzlemin herhangi bir üçgenleştirilmesi
3. Küpün herhangi bir üçgenleştirilmesi

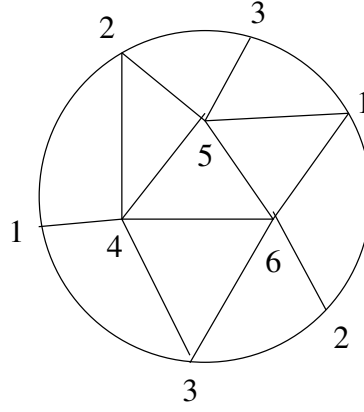


Şekil 3.5: Küpün üçgenleştirilmesi

Not:Kompakt yüzeyin üçgenleştirilmesi aşağıdaki iki özellikliliği sağlar;

- (a) Üçgenleştirmenin her kenarı iki üçgenin kenarıdır
- (b) ϑ , üçgenleştirmenin bir köşesi olsun. ϑ köşeli üçgenler mevcuttur öyle ki bu üçgenlerin ortak kenarları vardır.

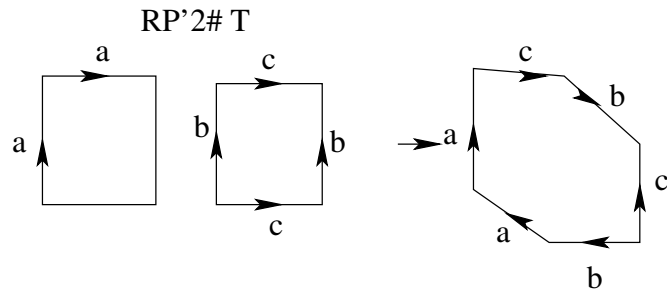
4. Kürenin herhangi bir üçgenleştirilmesi



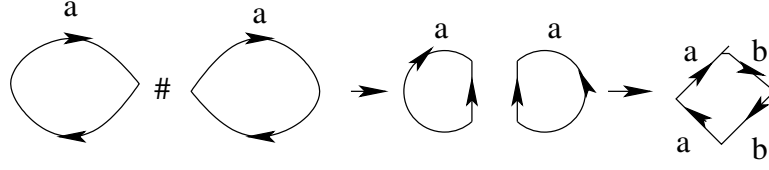
Şekil 3.6: Kürenin üçgenleştirilmesi

Lemma 3.3.1. Tor ve projektif düzlemin bağlantılı toplamı üç projektif düzlemin bağlantılı toplamına homeomorfdur.

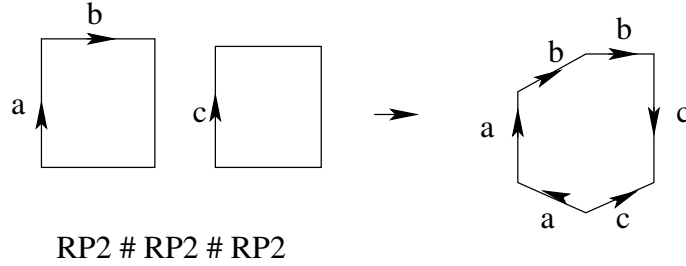
$$\mathbb{R}P^2 \# T \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$$



Şekil 3.7: $\mathbb{R}P^2 \# T$



Şekil 3.8: $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$



Şekil 3.9: $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$

3.4 Euler Karakteristiği

Euler karakteristiği, köşeleri, kenarları ve yüzeyleri sayarak elde edilir. Bu nedenle hücre(cell) kompleksi üzerinde duracağız.

Tanım 3.4.1. n -hücreyi, n -diske homeomorf olan bir topolojik nesne olarak tanımlanabilir.

Örnek 3.4.1. 1. 0-hücre (köşe) bir noktadır.

2. 1-hücre (kenar), $\mathbb{R}$ de bir açık aralığa homeomorftur.

3. 2-hücre (yüz), $\mathbb{R}^2$ de bir açık diske homeomorftur.

Tanım 3.4.2. Hücre Kompleksi, hücrelerin içi ikili bazında ayrık ve sınırları boyutu düşük olan hücrelerin birleşimi olan yani 0-hücre, 1-hücre, 2-hücre hücrelerin birleşimi olarak tanımlayabiliriz.

Not 3.4.1. Bir hücre kompleksi, bir M yüzeyine homeomorf ise bu hücre kompleksine, M 'nin **hücre ayrışımı** denir.

Örnek 3.4.2. Aşağıda yüzeylerin hücre ayrışımı verilmiştir; Buraya şekil yapılacaktır.

Tanım 3.4.3. Bir M yüzeyinin v köşesi, e kenarı ve f yüzeyi varsa M 'nin **Euler karakteristiği**

$$\chi(M) = v - e + f$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.4.3.

1. S^2 küre yüzeyinin 2 köşesi, 1 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(S^2) = v - e + f = 2 - 1 + 1 = 2.$$

2. T Tor yüzeyinin 1 köşesi, 2 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(T) = v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0.$$

3. $2T$ iki Tor yüzeyinin 1 köşesi, 4 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(2T) = v - e + f = 1 - 4 + 1 = -2.$$

4. $\mathbb{R}P^2$ projektif düzlemin 1 köşesi, 1 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = v - e + f = 1 - 1 + 1 = 1.$$

5. Kb Klein Şisesinin 1 köşesi, 2 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(Kb) = v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0.$$

6. Mb Möbiüs şeridinin 1 köşesi, 2 kenarı ve 1 yüzeyi olduğundan

$$\chi(Kb) = v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Not 3.4.2.

1. $\chi(Kb) = 0 = \chi(T)$ olmasına rağmen Kb ve T homeomorf yüzeyler değildir.
2. $Kb \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ olduğundan $\chi(Kb) = \chi(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2)$ dir.

Teorem 3.4.1.

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

İspat. M_1 yüzeyinin köşe sayısı v_1 olan $2n_1$ -gen ile temsil edilsin. Bu durumda

$$\chi(M) = v_1 - n_1 + 1.$$

M_2 yüzeyinin köşe sayısı v_2 olan $2n_2$ -gen ile temsil edilsin. Bu durumda

$$\chi(M) = v_2 - n_2 + 1.$$

$M_1 \# M_2$ yüzeyinin köşe sayısı $v_1 + v_2 - 1$ ve kenar sayısı $n_1 + n_2$ olan $2(n_1 + n_2)$ -gen ile temsil edilir.

$$\begin{aligned}\chi(M_1 \# M_2) &= v_1 + v_2 - 1 - (n_1 + n_2) + 1 \\ &= v_1 - n_1 + 1 + v_2 - n_2 + 1 - 2 \\ &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.\end{aligned}$$

□

Not 3.4.3. S^2 kulpsuz yüzey olduğundan $S^2 = 0T$ dir.

Sonuç 3.4.1.

1. $n \geq 0$ için $\chi(nT) = 2 - 2n$.
2. $m \geq 1$ için $\chi(\mathbb{R}P^2) = 2 - m$.

İspat.

1. $n = 0$ için $0T = S^2$ olduğundan $\chi(S^2) = 2$ dir. $n = 1$ için $\chi(T) = 0$ dir. $n = 2$ için $\chi(2T) = -2$. $n - 1$ için doğru olsun. Yani $\chi((n - 1)T) = \chi(T \# T \# \dots \# T) = 2 - 2(n - 1)$ olsun. Yani

$$\chi(nT) = \chi((n - 1)T \# T) = \chi((n - 1)T) + \chi(T) - 2 \quad (3.1)$$

$$= 2 - 2(n - 1) - 0 - 2 = 2 - 2n. \quad (3.2)$$

2. Birinci kısımda olduğu gibi m üzerinde tümevarımla ispatlanır. □

Teorem 3.4.2. M herhangi bir yüzey olsun. $\chi(M)$, M 'nin hücre ayrışımı seçiminden bağımsızdır.

Sonuç 3.4.2. Aşağıdaki önermeler Denktir;

1. M_1 yüzeyi M_2 yüzeyine homeomorftur.
2. $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ ve M_1, M_2 nin her ikisi oriyantel veya her ikisi oriyantel değildir.

İspat. 1) $\Rightarrow$ 2) : $h : M_1 \longrightarrow M_2$ homeomorfizma olsun. h , M_1 'in hücre ayrışımını M_2 nin hücre ayrışımına taşıdığından $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ dir. Ayrıca oriyantellik bir topolojik özellik olduğundan M_1 yüzeyi oriyantel ise M_2 de oriyanteldir.

2) $\Rightarrow$ 1) : İkinci önerme mevcut olsun. M_1 yüzeyinin M_2 yüzeyine homeomorf olduğunu göstereceğiz. Bunun yüzeylerin oriyantel olma ve oriyantel olmama durumlarına göre ispatlayacağız.

Durum 1 : M_1 ve M_2 nin her ikisinde oriyantel olsun. O zaman $M = n_1T$ ve $M_2 = n_2T$ dir. $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ olduğundan

$$2 - 2n_1 = 2 - 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Dolayısıyla $M_1 \approx n_1T = n_2T \approx M_2$ dir.

Durum 2: M_1 ve M_2 nin her ikisinde oriyantel olmasın. O zaman $M = m_1\mathbb{R}P^2$ ve $M_2 = m_2\mathbb{R}P^2$ dir. $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ olduğundan

$$2 - m_1 = 2 - m_2 \Rightarrow m_1 = m_2.$$

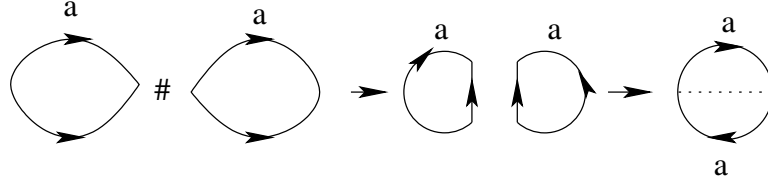
Dolayısıyla $M_1 \approx M_2$ dir

□

Örnek 3.4.4. $KB \# \mathbb{R}P^2$, $T \# \mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ yüzeylerinin homeomorf olduklarını gösterelim.

3.5 Yüzeyler Cebiri

Verilen kompakt yüzey kelime ile belirtilebilir. Kelime ve devir kuralını kullanarak kompakt yüzeyin düzlem modeli inşa edilir.



Şekil 3.10: $S^1 \# S^1$

Örnek 3.5.1. $T \# Kb \# Rp^2$
 $T \oplus Kb \oplus Rp^2: acd^{-1}eec^{-1}d^{-1}ba^{-1}b^{-1}$

Teorem 3.5.1. (Pozisyon Devir Kuralı) Bir kompakt yüzey M kelimesi ile belirtilsin.

1. $M = AB$ ise $M \sim BA$ (Çember Kuralı)
2. $M \sim M^{-1}$ (Flip Kuralı)

Teorem 3.5.2. (Küre Devir Kuralı) $M = Axx^{-1}B$ bir kompakt yüzeyi belirtsin. (A ve B den en az biri boştan farklı) O zaman AB bu kompakt yüzeyi belirtir ve $M \sim AB$ dir.

Örnek 3.5.2. Küre için;

$$\begin{aligned} M &= afg^{-1}e^{-1}b^{-1}bec^{-1}cgdd^{-1}f^{-1}a^{-1} \sim afg^{-1}e^{-1}egf^{-1}a^{-1} \\ &\sim afg^{-1}gf^{-1}a^{-1} \sim aff^{-1}a^{-1} \sim aa^{-1} = S^2 \end{aligned}$$

Teorem 3.5.3. (Silindir Devir Kuralı) M bir kompakt yüzey için kelime ve $M = AxBCx^{-1}D$ ise $M \sim AxCBx^{-1}D$ dir.

Örnek 3.5.3.

$$\begin{aligned} M &= abca^{-1}b^{-1}c^{-1} = a(bc)a^{-1}b^{-1}c^{-1} \sim a(cb)a^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ &= acba^{-1}b^{-1}c^{-1} = ac(ba^{-1}b^{-1})c^{-1} \\ &\sim ac(a^{-1}b^{-1}b)c^{-1} \sim aca^{-1}c^{-1} = T \end{aligned}$$

Not: $S^2 = aa^{-1}$, $T = aba^{-1}b^{-1}$, $Rp^2 = aa$, $Kb = aba^{-1}b$

Teorem 3.5.4. (Mobius Şerit Devir Kuralı) Bir kompakt yüzeyi belirten kelime M ve $M = AxBxC$ ise $M \sim AxxB^{-1}C$ dir.

Örnek 3.5.4.

1. $M = abca^{-1}b^{-1}c \sim abccba \sim ccabba \sim ccaabb = Rp^2Rp^2Rp^2 = 3Rp^2$
2. $Kb = aba^{-1}b \sim abba \sim aabb = Rp^2Rp^2 = 2Rp^2$
3. $TRp^2 = aba^{-1}b^{-1}cc \sim a^{-1}b^{-1}(cca)b \sim a^{-1}b^{-1}cacb$
 $\sim a^{-1}b^{-1}cca^{-1}b \sim a^{-1}b^{-1}a^{-1}bcc \sim bab^{-1}a(cc) = KbRp^2$

3.6 Ekli Uzaylar

Tanım 3.6.1. A, X in alt uzayı ve $f : A \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $\forall x \in A$ için $x \sim f(x)$ bağıntısı tanımlansın. $\frac{X \cup Y}{x \sim f(x)} = X \cup_f Y$ bölüm uzayına X in Y uzayına eklenmesi denir.

Örnekler:

1. $X = [0, 1] = Y, A = \{0, 1\}$

$$f : \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

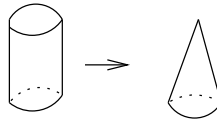
2. $X = [0, 1] \times [0, 1] = Y, A = \{0\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1]$

$$f : A \rightarrow Y$$

$$(s, t) \rightarrow f(s, t) = \left(\frac{1}{2}, t\right)$$

3. Koni

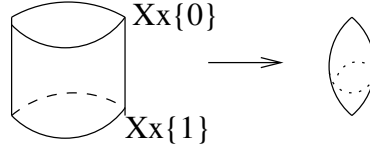
$$X \times \{1\}$$



$$X \times I$$

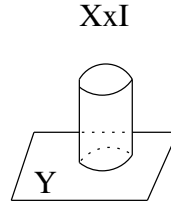
Şekil 3.11: Koni dönüşümü

4. Süspansiyon



Şekil 3.12: Süspansiyon

5. Mapping Silindir



Şekil 3.13: Silindir dönüşümü

3.7 Alıştırmalar

1. $T \# S^2 \approx T$ olduğunu şekille gösteriniz.
2. $Rp^2 \# Rp^2 \approx Kb$ olduğunu şekil çizerek gösteriniz.
3. $T \# Rp^2 \approx 3Rp^2$ olduğunu uygun indirgeme kurallarının kullanarak ispat ediniz.
4. n tane Rp^2 nin bağlantılı toplamı $2n$ kenarlı poligonla temsil edilir ve bu toplamın yüzey cebiri ise $a_1a_1a_2a_2 \cdots a_na_n$ şeklindedir. (yol gösterme : ispat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır.)
5. Uygun indirgeme işlemlerinden yararlanarak $abc^{-1}b^{-1}a^{-1}c^{-1}$ ve $acb^{-1}a^{-1}c^{-1}b$ yüzeylerinin orientable yüzey olup olmadıklarını inceleyiniz.
6. $\#$ bağlantılı toplam işlemi komutatif midir? Birleşmeli midir? Birim elemanı var mıdır? Ters elemanı var mıdır? Sonucu yorumlayınız.

7. $b^{-1}a^{-1}c^{-1}c^{-1}ba$ yüzeyi ile $x^{-1}x^{-1}y^{-1}y^{-1}z^{-1}z^{-1}$ yüzeyi aynı yüzeyin cebirsel gösterimi olabilir mi? Açıklayınız. (yol gösterme : indirgeme metodlarını kullanınız.)
8. $2T \# Rp^2 \approx 5Rp^2$ olduğunu gösteriniz. (yol gösterme : 3üncü sorudan yararlanınız.)
9. x bir kenarı ; P , Q ler de kenarların dizilerini temsil etsin. Uygun bir x_1 kenarı için ;
 $xxP^{-1}Q \approx x_1Px_1Q$ dir. Şekil çizerek ispatlayınız.
10. x bir kenarı , P , Q , R ler de kenarların dizilerini temsil etsin. Uygun bir x_1 kenarı için
 $xPQx^{-1}R \approx x_1QPx_1^{-1}R$ dir. Şekil çizerek ispatlayınız.
11. Aşağıdaki kelimelerin hangi yüzeyi belirttiğini bulunuz.
 - (a) $abcba^{-1}c$
 - (b) $abec^{-1}ba^{-1}cd^{-1}ed$
 - (c) $ab^{-1}cedefa^{-1}bc^{-1}d^{-1}f$
 - (d) $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}d^{-1}$
 - (e) $ab^{-1}c^{-1}a^{-1}cb$
 - (f) $abc^{-1}bca$
 - (g) $abcb^{-1}dc^{-1}d^{-1}a^{-1}$

Bölüm 4

TOPOLOJİK GRUPLAR, GRUP HAREKETİ, LİE GRUPLARI

4.1 Topolojik Gruplar

Tanım 4.1.1. (G, τ) topolojik uzay ve $(G, .)$ bir grup olsun. Aşağıdaki özelliklikler mevcut ise; $(G, \tau, .)$ üçlüsüne topolojik grup denir.

1. $f : G \times G \longrightarrow G \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x.y$ sürekli fonksiyon
2. $g : G \rightarrow G \quad x \mapsto x^{-1}$ sürekli fonksiyon

Örnek 4.1.1. 1. $(\mathbb{R}, \tau_s, +)$ bir topolojik guptur.

$(\mathbb{R}, \tau_s)$ bir topolojik uzay ve $(\mathbb{R}, +)$ bir gruptur.

- (a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x + y = \pi_1(x, y) + \pi_2(x, y)$
İzdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan toplamaları da süreklidir.
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = -x = (-1).x = a.I(x)$
Sürekli fonksiyonun sabit bir sayı ile çarpımı sürekli olduğundan g süreklidir.

2. $(G, .)$ bir grup olsun. G üzerinde diskret topoloji alırsak $(G, \tau_d, .)$ bir topolojik gruptur. (G, τ_d) bir topolojik uzaydır.

- (a) $f : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x.y$
- (b) $g : G \rightarrow G \quad x \mapsto g(x) = x^{-1}$
 (G, τ_d) den alınan her açık $(G \times G, \tau_d \times \tau_d)$ uzayında açık olacağından f ve g süreklidir.

3. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $(\mathbb{R}^*, \tau_s, .)$ bir topolojik guptur. $(\mathbb{R}^*, .)$ bir grup ve $(\mathbb{R}^*, \tau_s)$, $(\mathbb{R}, \tau_s)$ nin altuzay topolojisidir.

- (a) $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x.y = \pi_1(x, y). \pi_2(x, y)$

- (b) $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \quad x \mapsto g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{I(x)}, \quad I(x) \neq 0$
 f ve g süreklidir.
4. $(S^1, \tau, \cdot)$ bir topolojik gruptur. $\tau = \tau_s \times \tau_s$, $\cdot : \mathbb{C}$ deki çarpma işlemidir. (S^1, τ) topolojik uzay ve $(S^1, \cdot)$ bir gruptur.
- (a) $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \quad (z_1, z_2) \mapsto f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2 = \pi_1(z_1, z_2) \cdot \pi_2(z_1, z_2)$
- (b) $g : S^1 \rightarrow S^1 \quad z \mapsto g(z) = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \bar{z} = e^{-i\theta} = (\cos \theta, -\sin \theta)$
 f ve g süreklidir.
5. Banach ve Hilbert uzayları birer topolojik gruptur.
 Banach uzayı normlu tam vektör uzayıdır. Vektör uzayı olduğundan grup yapısı vardır. Norm tarafından üretilen topolojiye sahiptir.
- (a) $f : B \times B \rightarrow B \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$
- (b) $g : B \rightarrow B \quad x \mapsto g(x) = -x$
 f ve g süreklidir.
6. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{(0, 0)\}$, $(\mathbb{C}^*, \tau, \cdot)$ bir topolojik gruptur. ($\cdot : \mathbb{C}$ deki çarpma)

Önerme 4.1.1. İki topolojik grubun kartezyen çarpımı topolojik gruptur. $(G_1, \tau_1, \cdot)$, $(G_2, \tau_2, *)$ topolojik gruplar ise $(G_1 \times G_2, \tau_1 \times \tau_2, o)$ topolojik gruptur.

İspat. $(G_1, \tau_1, \cdot)$ topolojik grup olduğundan

$$f_1 : G_1 \times G_1 \rightarrow G_1 \quad (x, y) \mapsto f_1(x, y) = x \cdot y$$

ve

$$g_1 : G_1 \rightarrow G_1 \quad x \mapsto g_1(x) = x^{-1}$$

süreklidir. $(G_2, \tau_2, *)$ topolojik grup olduğundan

$$f_2 : G_2 \times G_2 \rightarrow G_2 \quad (x, y) \mapsto f_2(x, y) = x * y$$

ve

$$g_2 : G_2 \rightarrow G_2 \quad x \mapsto g_2(x) = x^{-1}$$

süreklidir.

$$f = f_1 \times f_2 : G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto f_1 \times f_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \cdot y_1, x_2 * y_2)$$

f_1 ve f_2 sürekli olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

$$g = g_1 \times g_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto g_1 \times g_2(x_1, x_2) = (g_1(x_1), g_2(x_2)) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$$

g_1 ve g_2 sürekli olduğundan g fonksiyonu sürekli.

□

Ödev: $(G_1 \times G_2, \tau_1 \times \tau_2)$ nin topolojik uzay, $(G_1 \times G_2, o)$ nin grup olduğunu gösteriniz.

Örnek 4.1.2.

1. $(\mathbb{R}^n, \tau, +)$ topolojik gruptur. (τ : Çarpım topolojisi)
2. $(T, \tau, \cdot)$ topolojik gruptur. $T \approx S^1 \times S^1$ dir. $(S^1, \tau_1, \cdot)$ ve $(S^1, \tau_2, +)$ topolojik gruplardır.
3. $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} : \det A \neq 0\}$ matris çarpımına göre grup yapısı teşkil eder.
4. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} : \det A = 1\}$ özel lineer gruptur.
5. $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} : \det A \neq 0, A^T A = I = A A^T\}$ ortogonal gruptur.
6. $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} : \det A = 1, A^T A = I = A A^T\}$ özel ortogonal gruptur.

$SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{R})$ nin alt gruplarıdır.

Önerme 4.1.2. $(G, \tau, \cdot)$ bir topolojik grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Alt uzay topolojisi ile donatılan H grubu G nin bir topolojik alt grubudur.

Tanım 4.1.2. $(G, \tau, \cdot)$ bir topolojik grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. H açık (kapalı) alt küme ise H ya açık (kapalı) altgrup denir.

Örnek 4.1.3. $GL(n, \mathbb{R})$ nin $SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$ alt grupları kapalı alt gruplardır.

$$\det : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \det A$$

fonksiyonu sürekli. $\{1\} \subset \mathbb{R}$ kapalı için $\det^{-1}(\{1\}) = SL(n, \mathbb{R})$ olduğundan $SL(n, \mathbb{R})$ kapalıdır.

$$t : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n} \quad A \mapsto t(A) = A A^T = I$$

fonksiyonu sürekli. $I \subset M_{n \times n}$ kapalı için $t^{-1}(I) = O(n, \mathbb{R})$ olduğundan $O(n, \mathbb{R})$ kapalıdır.

$SO(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R})$ olduğundan $SO(n, \mathbb{R})$ kapalıdır.

Örnek 4.1.4. $(\mathbb{Z}, \tau_d, +)$, $(\mathbb{R}, \tau_d, +)$ nın topolojik alt grubudur.

Uyarı: Topolojik gruplarda izomorfizma teoremleri aşağıdaki önerme geçerli olduğunda geçerlidir.

" $f : G \rightarrow H$ homeomorfizma olsun. $G/Ker f \simeq Im f$ dir $\Leftrightarrow f : G \rightarrow Im f$ açık dönüşümdür."

Tanım 4.1.3. G bir topolojik grup ve $g \in G$ olsun. $L_g : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $L_g(x) = g.x$ fonksiyonuna homeomorfizmanın sol öteleme fonksiyonu denir. $R_g : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $R_g(x) = x.g$ fonksiyonuna da homeomorfizmanın sağ öteleme fonksiyonu denir.

Teorem 4.1.1. L_g ve R_g bir homeomorfizmdir.

İspat. $L_g : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $L_g(x) = g.x$ fonksiyonunu ele alalım. G topolojik grup olduğundan

$$f : G \times G \longrightarrow G \quad (g, x) \mapsto f(g, x) = g.x$$

fonksiyonu süreklidir. $L_g(x) = f|_{\{g\} \times G}$ olduğundan L_g fonksiyonu süreklidir.

$$L_g(x_1) = L_g(x_2) \Rightarrow g.x_1 = g.x_2 \Rightarrow g^{-1}(g.x_1) = g^{-1}(g.x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

dolayısıyla $L_g^{-1} = 1 - 1$ dir. $\forall y \in G$ için $x = g^{-1}.y \in G$ olduğundan L_g örtendir. $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçektende

$$L_{g^{-1}} \circ L_g(x) = g^{-1}(g.x) = x = I(x)$$

$$L_g \circ L_{g^{-1}}(x) = g(g^{-1}.x) = x = I(x)$$

dir. $L_{g^{-1}} : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $L_{g^{-1}}(x) = g^{-1}.x$ fonksiyonunu verilsin. $(L_g)^{-1} = f|_{\{g^{-1}\} \times G}$ olduğundan $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ fonksiyonu süreklidir.

Benzer şekilde R_g nin de homeomorfizm olduğu gösterilebilir. $\square$

Sonuç 4.1.1. G topolojik grup, $g \in G$ ve U, G de açık ise $L_g(U)$ ve $R_g(U)$, G de açık alt kümelerdir.

Tanım 4.1.4. A ve B, G topolojik grubunun iki alt kümesi olsun.

1. $A.B = \{x.y : x \in A, y \in B\}$
2. $x.A = \{x\}.A = \{x.a : a \in A\}$
3. $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$
4. $A = A^{-1}$ ise A ya G de simetriktir denir.

Teorem 4.1.2. G topolojik grup, $F, U, P \subset G$ ve F kapalı, U açık, P keyfi bir küme, $g \in G$ olsun. Fg, gF, F^{-1} kapalı kümelerdir. UP, PU, U^{-1} açık kümelerdir.

İspat. $L_g : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $L_g(x) = g.x$ ve $R_g : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $R_g(x) = x.g$ dönüşümleri homeomorfizmdir. F kapalı ise $L_g(F) = g.F$ ve $R_g(F) = F.g$ kümeleri de L_g ve R_g homeomorfizma olduğundan kapalıdır. $f : G \rightarrow G, \forall x \in G$ için $f(x) = x^{-1}$ fonksiyonu homeomorfizmdir. F kapalı olduğundan $f(F) = F^{-1}$ de f homeomorfizma olduğundan kapalıdır. U açık olduğundan $L_g(U)$ ve $R_g(U)$ açıktır.

$$UP = \bigcup U.g \quad (g \in P) \quad \text{ve} \quad PU = \bigcup g.U \quad (g \in P)$$

kümeleri açıktır. U açık olduğundan $f(U) = U^{-1}$ de açıktır. $\square$

Önerme 4.1.3. G bir topolojik grup olsun.

1. G nin açık topolojik alt grubu H aynı zamanda kapalıdır.
2. H, G nin topolojik alt grubu ise $\overline{H}$ da G nin topolojik alt grubudur.

İspat.

1. H, G nin açık topolojik alt grubu olsun. $H = \overline{H}$ olduğunu göstermeliyiz. Her zaman $H \subset \overline{H} \dots (1)$ olur. $p \in \overline{H}$ olsun. $p.H, p$ nin bir komşuluğu olduğundan $p.H \cap H \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $p.h_1 = h_2$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in H$ vardır. O halde $p \in H$ dir. $\overline{H} \subset H \dots (2)$ elde edilir. (1) ve (2) den $H = \overline{H}$ olur. Bu da H ın kapalı olduğunu ifade eder.
2. H, G nin topolojik alt grubu olsun. $\overline{H}$ ın G nin topolojik alt grubu olduğunu göstermek için $\forall x, y \in \overline{H}$ için $x.y \in \overline{H}$ ve $\forall x \in \overline{H}$ için $x^{-1} \in \overline{H}$ olduğunu göstermeliyiz.
 - (a) $\forall x, y \in \overline{H}$ olsun. W $x.y$ nin komşuluğu olsun. $U.V \subset W$ olacak şekilde $x \in U, y \in V$ komşulukları vardır. $x \in \overline{H}$ ise $U \cap H \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $h_1 \in U \cap H$ vardır. Benzer şekilde $y \in \overline{H}$ ise $V \cap H \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $h_2 \in V \cap H$ vardır. $h_1.h_2 \in U.V$ ve $h_1.h_2 \in H$ ise $U.V \cap H \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $W \cap H \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan $x.y \in \overline{H}$ bulunur.
 - (b) $x \in \overline{H}$ olsun. x in her U komşuluğu için $U \cap H \neq \emptyset$ dir. $U^{-1} = \{x^{-1} : x \in H\}$ ve $U^{-1} \cap H \neq \emptyset$ olduğundan $x^{-1} \in \overline{H}$ olur.

$\overline{H}$ bir topolojik alt grupdur.

□

Önerme 4.1.4. G bir topolojik grup olsun.

1. V nin G de açık (kapalı) olması için gerek ve yeter şart V^{-1} 'in G de açık (kapalı) olmasıdır.
2. $e \in U$ olmak üzere U , G de açık olsun. $V = V^{-1}$ ve $V \cdot V \subset U$ olacak şekilde V açık kümesi vardır ve $e \in V$ dir

İspat.

1. $f : G \longrightarrow G$ $g \mapsto f(g) = g^{-1}$ dönüşümü homeomorfizm ve $f \circ f = 1_G$ olduğunda sonuç kolayca elde edilir. □
2. $p : G \times G \longrightarrow G$ dönüşümü sürekli olduğundan $p^{-1}(U)$, $G \times G$ de açık ve $(e, e) \in p^{-1}(U)$ dir. Dolayısıyla, $V_1 \cdot V_2 \subset U$ olacak şekilde V_1 ve V_2 açıkları var ve $e \in V_1$, $e \in V_2$ dir. Bir önceki kısımdan, V_1^{-1} , V_2^{-1} açıktır. Böylece $V = V_1 \cap V_2 \cap V_1^{-1} \cap V_2^{-1}$ aynı zamanda açıktır. $e \in V$ ve $V = V^{-1}$, $V \cdot V \subset V_1 \cdot V_2 \subset U$ dir. □

Lemma 4.1.1. G bir topolojik grup olsun. G nin Housdorff olması için gerek ve yeter şart $\{e\}$ nin kapalı olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) G Housdorff olsun. Her tek noktalı küme kapalı olduğundan $\{e\}$ kapalıdır.

($\Leftarrow$) $\{e\}$ kapalı olsun. Her g için $L_g(\{e\}) = g$ kapalıdır. $e \neq g$ nin ayrık açıklarının var olduğunu göstereceğiz. $e \in U$ ve gU olacak şekilde bir U açık vardır. Bir önceki önermenin ikinci bölümünden, $V = V^{-1}$ ve $V \cdot V \subset U$ olacak şekilde V açık kümesi vardır ve $e \in V$ dir. Şimdi $g \in gV$ dir. $V \cap gV$ nin boş olduğunu iddia ediyoruz. $h \in V \cap gV$ olduğunu varsyalım. O zaman $h = gh_1$, $h_1 \in V$ dir. Dolayısıyla, $g = hh^{-1} \in V \cdot V \subset U$ olur. Bu bir çelişkidir. □

Teorem 4.1.3. G bir topolojik grup olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1. G , T_0 -uzayıdır.
2. G , T_1 -uzayıdır.
3. G , T_2 -uzayıdır.

Teorem 4.1.4. G topolojik grubu regülerdir.

İspat. Aşağıdaki aksiyomu sağlayan X topolojik uzayına regüler uzay denir;

" $F \subset X$ kapalı, $x \notin F$ için $\exists F \subset U$ açık, $\exists x \in V$ açık : $U \cap V = \emptyset$." F kapalı ve $e \notin F$ olsun. Bu durumda $e \in G/F$ dir. G topolojik grup olduğundan $V^{-1}V \subset G/F$ olacak şekilde e nin V komşuluğu vardır. $V^{-1}V \cap F = \emptyset \Rightarrow V \cap V.F = \emptyset$. Böylece $U = V.F$ dir ve sonuçta G regülerdir. $\square$

Not 4.1.1. Bir topolojik grubun bölüm grubu topolojik grup olmak zorunda değildir. Normal alt grup ise topolojik gruptur.

Teorem 4.1.5. G bir topolojik grup, N , G nin normal alt grubu olsun.

1. $\varphi : G \rightarrow G/N$ sürekli ve açık homomorfizmadır.
2. Bölüm topolojisi ile donatılan G/N topolojik gruptur.

İspat.

1. $\varphi : G \rightarrow G/N$ bölüm dönüşümü olduğundan süreklidir. $U \subset G$ açık olsun.

$$\varphi^{-1}(\varphi(U)) = \{x : x \in UN = U\} = UN$$

açıktır. φ sürekli olduğundan $\varphi(U)$ da açıktır. U açık iken $\varphi(U)$ açık olduğundan φ açık dönüşümdür.

2. $\psi : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ $(x, y) \mapsto x.y^{-1}$ dönüşümü sürekli midir? $x.y^{-1}$ elemanının açık komşuluğu W olsun. $\varphi^{-1}(W)$, G de açıktır ve $x.y^{-1} \in \varphi^{-1}(W)$ dur. G topolojik grup olduğundan

$$x.y^{-1} \in UV^{-1} \subset \varphi^{-1}(W)$$

olacak şekilde $x \in U$, $y \in V$ komşulukları vardır.

$$x.y^{-1} \in \varphi(U)[\varphi(V)]^{-1} \subset \varphi(\varphi^{-1}(W)) = W$$

dur. φ açık dönüşüm olduğundan $\varphi(U)$ ve $[\varphi^{-1}(V)]^{-1} = \varphi(V^{-1})$ de açıktır.

$$\psi^{-1}(W) = \{(x, y) : x \in \varphi(U), y \in \varphi(V^{-1})\},$$

ψ süreklidir.

$\square$

Tanım 4.1.5. G ve K iki topolojik grup olsun. $f : G \rightarrow K$ dönüşümü hem grup izomorfizmi hemde homeomorfizme ise G ve K **Topolojik olarak izomorftur** denir. Böyle dönüşüme de **topolojik izomorfizma** denir.

Örnek 4.1.5. $G = K = (R, +)$ grup ve K üzerinde standart topoloji ve G üzerinde diskrit topoloji olsun. $1 : (R, +, \tau_d) \longrightarrow (R, +, \tau_s)$ birim dönüşümü sürekli, izomorfizmdir fakat tersi sürekli olmadığından bu dönüşüm topolojik izomorfizma değildir.

Örnek 4.1.6. G herhangi bir topolojik grup ve $g \in G$ olmak üzere $\pi : G \longrightarrow G \quad h \mapsto \pi(h) = ghg^{-1}$ dönüşümü bir topolojik izomorfizmadır.

Not 4.1.2. K Hausdorff olmak üzere $\pi : G \longrightarrow K$ sürekli homomorfizma ise $\text{Ker}(\pi)$ G 'nin kapalı, normal alt grubudur.

Önerme 4.1.5. $\pi : G \longrightarrow K$ homomorfizması e de sürekli ise π süreklidir.

İspat. $\pi : G \longrightarrow K$ homomorfizması e de sürekli olsun O zaman K daki e nin U açığı için $\pi^{-1}(U)$, G de açıktır.

Şimdi W , K da açık olsun. $\pi(U) \cap W$ boş küme ise $\pi^{-1}(W)$ boş küme olacaktır ve dolayısıyla açıktır. Bu nedenle $\pi(g) = k$ olacak şekilde $g \in G$ bir elemanın var olduğunu varsayalım. Böylece $k^{-1}W$, K daki e nin bir açık komşuluğudur. Dolayısıyla $\pi^{-1}(k^{-1}W)$ açıktır. Bu nedenle $\pi^{-1}(W) = g\pi^{-1}(k^{-1}W)$ açıktır. $\square$

Önerme 4.1.6. $\pi : G \longrightarrow K$ sürekli homomorfizma ve $H = \text{Ker}\pi$ olsun. $\pi : G/H \longrightarrow K$ bir sürekli homomorfizmadır.

Önerme 4.1.7. $\pi : G \longrightarrow K$ sürekli örten homomorfizma ve $H = \text{Ker}\pi$ olsun. π bir açık dönüşüm ise $\pi : G/H \longrightarrow K$ bir topolojik izomorfizmadır.

İspat. π nın tersinin sürekli olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Buda π nın açık olmasına denktir. U nun G/H da açık olması için gerek ve yeter şart $V = q^{-1}(U)$, G de açık olmasıdır. Böylece U , G/H açık ise $\pi(U) = \pi(V)$, K da açıktır. $\square$

Örnek 4.1.7. $\pi(R, +) \longrightarrow S^1 \quad t \mapsto \pi(t) = e^{2\pi it}$ şeklinde tanımlı dönüşüm sürekli homomorfizma ve $\text{Ker}\pi = Z$. Önermeden, $\pi : R/Z \longrightarrow S^1$ bir topolojik izomorfizmadır.

Teorem 4.1.6. $GL(n)$ bir topolojik gruptur.

İspat. M , $n \times n$ tipindeki reel değişkenli matrislerin kümesi olsun. $A \in M \subset \mathbb{R}^{n^2}$, $A = (a_{ij})$ olarak alalım. $A = (a_{ij})$ matrisini

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

formunda düşünebiliriz.

$$f : M \times M \rightarrow M \quad (A, B) \mapsto f(A, B) = A.B$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu süreklidir. Çünkü $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ise $f(A, B) = A.B$ nin ij -inci bileşeni $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$ dir.

$$\pi_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (a_{1n}, \dots, a_{nn}) \mapsto \pi_{ij}(a_{1n}, \dots, a_{nn}) = a_{ij}$$

fonksiyonu süreklidir. f ve π_{ij} fonksiyonları sürekli olduğundan

$$\pi_{ij} \circ f : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (A, B) \mapsto \pi_{ij} \circ f(A, B) = c_{ij}$$

fonksiyonu süreklidir. $GL(n) \subset M$ alalım. $GL(n)$ için altuzay topolojisi oluşturulur. π_{ij} ve $\pi_{ij} \circ f$ dönüşümleri sürekli olduğundan

$$f : GL(n) \times GL(n) \longrightarrow GL(n) \quad (A, B) \mapsto f(A, B) = A.B$$

dönüşümü süreklidir. $Adj(A)$ ve $detA$ dönüşümleri sürekli olduğundan

$$g : GL(n) \rightarrow GL(n) \quad A \mapsto g(A) = A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot Adjoint(A)$$

dönüşümü süreklidir. Burada $Adjoint(A)$, A matrisinin a_{ij} elemanını silip A_{ij} kofaktörünü yazıp ve elde edilen matrisin transpozmesini almak suretiyle elde edilen matristir. $\square$

Özellikler 4.1.1. 1. $GL(n)$ kompakt değildir.

İspat. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = detA$ fonksiyonu süreklidir. $\{0\} \subset \mathbb{R}$ de kapalı, $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ de açık $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = GL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ açıktır. Henri-Borel teoremine göre $A \subset \mathbb{R}^{\times}$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart A nın sınırlı ve kapalı olmasıdır. Bu durumda $GL(n)$ kompakt değildir. $\square$

2. $GL(n)$ bağlantılı değildir.

İspat. $K = \{A \in GL(n) : detA > 0\}$, $L = \{A \in GL(n) : detA < 0\}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ için $f^{-1}((0, \infty)) = K$, $f^{-1}((-\infty, 0)) = L$ dir. $GL(n) = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$ dir. Bu durumda $GL(n)$ bağlantılı değildir. $\square$

3. $O(n)$ ve $SO(n)$ kapalı alt grupları $GL(n)$ nin kompakt alt gruplarıdır.

İspat. $A \in O(n)$ için $A.A^T = I$, $1 \leq i, k \leq n$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}$ ve $f_{ik} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{ik}(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}$ olsun. $\{0\}, \{1\} \subset \mathbb{R}$ kapalıları için $f_{ik}^{-1}(\{0\})$ ve $f_{ii}^{-1}(\{1\})$ $1 \leq i \leq n$ kümeleri kapalıdır. Bu kümelerin arakesiti $O(n)$ yi verir. Buradan da $O(n)$ nin kapalı olduğunu söyleyebiliriz.

$$A.A^T = I \Rightarrow det(A.A^T) = detI = 1 \Rightarrow detA \cdot detA^T = 1$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow |a_{ij}| < 1.$$

O halde $O(n)$ sınırlıdır. $O(n)$ kapalı ve sınırlı olduğundan $O(n)$ kompakttır.

$SO(n), O(n)$ in kapalı alt kümesidir. Kompakt uzayların kapalı alt uzayları da kompakt olduğundan $SO(n)$ kompakttır. $\square$

4. $SO(2) \approx S^1$ dir.

İspat. $f : SO(2) \rightarrow S^1, \forall \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$ için

$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = a + ib \in S^1$ olsun. f , 1-1 ve örtendir. $\square$

Teorem 4.1.7. X kompakt, Y Hausdorff uzayı olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ biyektif ise f homeomorfizmadır."

O halde f homeomorfizmdir.

4.2 Grup Hareketi ve Orbit Uzayları

Tanım 4.2.1. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler mevcut ise G, X üzerinde (soldan) hareket ediyor denir.

1. $G \times X \rightarrow X$ dönüşümü süreklidir.
 $(g, x) \rightarrow gx$
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X$ için $hg(x) = h(g(x))$ dir.
3. $e \in G$ ve $\forall x \in X$ için $ex = x$ dir.

Tanım 4.2.2.

1. $O(x) = \{gx : g \in G\}$ kümesine x elemanın **orbiti** denir.
2. $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine x elemanın **stablizer grubu** denir.
3. Herhangi $x, y \in X$ için $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa G 'nin X üzerindeki harekete **transitif** denir
4. Bir x için $gx = x$ iken $g = e$ oluyorsa, G 'nin X üzerindeki harekete **serbest (yada yarı-regüler)** denir.
5. G 'nin X üzerindeki hareketi hem transitif hemde serbest ise bu harekete **regüler** denir

Örnek 4.2.1.

1. $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (n, x) \mapsto n + x$
 $O(x) = \{n + x : n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1 \Rightarrow O(x) = S^1$
2. $\mathbb{Z}_2 \times S^1 \rightarrow S^1 \quad (-1, x) \mapsto -x \quad (1, x) \mapsto x$
 $O(x) = \{-x, x\} = S^1/\mathbb{Z}_2 \approx \mathbb{R}p^1 \Rightarrow O(x) = \mathbb{R}p^1$
- 3.

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto (x + 1, y)$$

$$\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$$

olmak üzere α ve β dönüşümşeri tatabından üretilen grup G olsun. G , $\mathbb{R}^2$ üzerinde hareket etmektedir. Yani

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, z) &\mapsto \alpha(z) \\ (\beta, z) &\mapsto \beta(z). \end{aligned}$$

Dolayısıyla orbit uzayı $O(x) = \mathbb{R}^2/G \approx Kb$

4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubu, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde hareket eder.

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (m, z) &\mapsto m + z. \end{aligned}$$

Dolayısıyla orbit uzayı $O(x) = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1 \approx T$

5. $(x - 3)^2 + z^2 = 1$ çemberinin z -ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzey T torudur.

$\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ olmak üzere G_1 grubu α_1 tarafından üretilen bir grup olsun.

$\alpha_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ olmak üzere G_2 grubu α_2 tarafından üretilen bir grup olsun.

$\alpha_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ olmak üzere G_3 grubu α_3 tarafından üretilen bir grup olsun.

Her $i = 1, 2, 3$ için G_i gruplarının $\mathbb{R}^3$ üzerinde hareketleri vardır. Orbit uzayları $\mathbb{R}^3/G_1 \approx S^2$, $\mathbb{R}^3/G_2 \approx T$ $\mathbb{R}^3/G_3 \approx Kb$

Teorem 4.2.1. Kompakt topolojik grup G , Housdorff topolojik uzayı X üzerinde hareket etsin. G_x , x elemanındaki stablizer grubunu göstermek üzere

$$\phi : G/G_x \longrightarrow O(x) \quad gG_x \mapsto gx$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homeomorfizmadır.

İspat. Dönüşümün sadece bijektif olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\phi(g_1G_x) = \phi(g_2G_x)$$

olsun. Bu durumda $g_1x = g_2x$ ve böylece $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ dir. Dolayısıyla

$$g_1G_x = g_2G_x$$

yani ϕ injektiftir. sürjektiflik kolayca gösterileceğinden ödevdir. $\square$

4.3 Lie Grupları

Tanım 4.3.1. M Hausdorff topolojik uzayına ait her noktanın komşuluğu $\mathbb{R}^n$ ye homeomorf ise M ye n -topolojik manifold denir.

Tanım 4.3.2. M Hausdorff ve 2. sayılabilir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip dönüşümler koleksiyonu ile birlikte M uzayına smooth n -manifold (diferansiyellenebilir n -manifold) denir.

1. $U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler olmak üzere $\phi : U \rightarrow V$ dönüşümü homeomorfizmdir. (Bu dönüşümlere harita denir.
2. $x \in M$, ϕ nin tanım kümesinde olmalıdır.
3. $\phi : U \rightarrow U'$ ve $\psi : V \rightarrow V'$ haritaları için $\phi \cap \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$, C^∞ sınıfındadır. (Bu dönüşüm her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir.
4. Harita koleksiyonu maksimal olacaktır.

Tanım 4.3.3. M ve N iki smooth n -manifold olsun. M üzerindeki harita φ ve N üzerindeki harita ψ için $\psi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$ smooth ise $f : M \rightarrow N$ dönüşümüne smooth dönüşüm denir.

Tanım 4.3.4. G diferansiyellenebilir manifold ve G bir grup olsun. Eğer

$$\alpha_G : G \times G \rightarrow G \quad (g, h) \mapsto \alpha_G(g, h) = g.h^{-1}$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise G ye **lie grup** denir.

Not 4.3.1. Bazı kitaplarda bu tanım şu şekilde verilir; G diferensiyellenebilir manifold ve G bir grup olsun.

1. $G \times G \longrightarrow G \quad (g, h) \mapsto g.h$ diferensiyellenebilir ve
2. $G \longrightarrow G \quad g \mapsto g^{-1}$ diferensiyellenebilir ise G ye **lie grup** denir.

Örnek 4.3.1.

1. $\mathbb{R}^n$ bir lie gruptur. Çünkü $\mathbb{R}^n$ bir diferensiyellenebilir manifold ve dönüşümü

$$\alpha_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (x, y) \mapsto \alpha_{\mathbb{R}^n}(x, y) = x - y$$

diferensiyellenebilirdir.

2. $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R})$ birer lie gruptur.
3. $n \times n$ tipindeki üst üçgen matrislerin kümesi bir lie gruptur.
4. Exceptional lie grupları: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 dir.
5. S^0, S^1, S^3 bunun üzerine bölüm yapısı oluşturuyoruz. Şöyle ki mutlak değeri 1 olan reel sayılar, kompleks sayılar, quaternion ...
 $S^0 = \mathbb{R}\mathbb{N}, S^1 = \mathbb{R}^2\mathbb{N}, S^3 = \mathbb{R}^4\mathbb{N}$ sadece bunlar lie gruplarıdır.
6. Heisenberg grupları lie gruptur.
7. Lorentz grupları lie gruptur.
8. $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ lie gruptur.
9. Metaplectic grup bir lie gruptur.

Lemma 4.3.1.

1. İki lie grubunun çarpımı da lie gruptur.
2. Lie grubunun kapalı alt grubu lie gruptur.
3. Lie grubunun kapalı normal alt grubu ile oluşturulan bölüm grubu bir lie gruptur.
4. Bağlantılı lie grubunun evrensel örtüsü lie gruptur.

Lie Gruplarının Sınıflandırılması:

1. Cebirsel özellik (Basit, Yarı basit, Çözülür, Nilpotent, Abel)
2. Bağlantılılık
3. Kompaktlık

4.4 Lie Cebirleri

Tanım 4.4.1. k karakteristiği sıfır olan bir cisim olmak üzere A bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan işlem

$$[,] : A \times A \longrightarrow A \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

ile birlikte A vektör uzayına **Lie Cebiri** denir;

1. $\forall x \in A$ için, $[x, x] = 0$.
2. $\forall x, y, z \in A$ için, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Örnek 4.4.1. 1. $[A, B] = 0$ olmak üzere bu işlem ile birlikte R^n bir Lie cebiridir.

2. $[A, B] = AB - BA$ olmak üzere bu işlem ile birlikte $GL(n, R)$ bir Lie cebiridir.

3. X, M üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi olsun. $[X, Y] = XY - YX$ işlemine göre bu küme bir Lie cebiridir.

Tanım 4.4.2. A ve B Lie cebirleri olmak üzere $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ özelliğini sağlayan $\varphi : A \longrightarrow B$ morfizmine **Lie cebir morfizmi** denir

4.5 Alıştırılmalar

1. G indiscret topoloji ile donatılmış bir grup ise gösteriniz ki G bir topolojik gruptur.
2. Bir G topolojik grubunun alt uzay topolojisi ile donatılmış tüm altgrupları da topolojik grup olur mu? Açıklayınız.
3. $G = (Z_2, +)$ toplamsal grubunun üzerinde $\tau_G = \{\emptyset, \{0\}, G\}$ topolojisi tanımlanmış olsun. G bir topolojik grup olur mu? Açıklayınız.
4. G topolojik grup ve $g \in G$ olsun. $R_g : G \longrightarrow G$ ve $\forall h \in G$ için $R_g(h) = hg$ şeklinde tanımlı R_g dönüşümünün bir homeomorfizm olduğunu gösteriniz.
5. G bir topolojik grup ve $g \in G$ olsun. $f : G \longrightarrow G$ ve $\forall h \in G$ için $f(h) = ghg^{-1}$ bir topolojik izomorfizmdir. Gösteriniz. (yol gösterme : f nin bir grup homomorfizması ve homeomorfizm olduğunu görünüz.)

6. $G = (R, \tau_{disk}, +)$ ve $K = (R, \tau_s, +)$ olsun. G ve K nin birer topolojik grup olduğunu gösterin. Bu iki uzay topolojik olarak izomorfik olur mu? Açıklayınız.
7. "." kompleks sayılarda çarpma işlemini gösterebilir. $(S^1, \tau_{S^1}, \cdot)$ nin bir topolojik grup olduğunu gösterin. $f : (R, \tau_s, +) \longrightarrow (S^1, \tau_{S^1}, \cdot)$ dönüşümü $\forall t \in R$ için $f(t) = e^{2\pi i t}$ şeklinde tanımlansın. $\frac{(R, +)}{\mathbb{Z}} \cong S^1, \cdot$ topolojik izomorfizm olduğunu gösteriniz. (yol gösterme: $\text{Ker } f = \mathbb{Z}$ olduğunu görünüz ve birinci izomorfizma teoremini gerçekleyiniz.)

Bölüm 5

SİMPLEKSLER

5.1 Affine Uzaylar

Tanım 5.1.1. A bir küme olsun. $\forall x, y \in A, t \in [0, 1]$ için $(1 - t)x + ty \in A$ oluyorsa A 'ya konveks küme denir.

Tanım 5.1.2. A , Euclid uzayının bir alt kümesi olsun. $\forall$ farklı $x, y \in A$ için x ve y tarafından oluşturulan doğru A 'da bulunuyorsa A 'ya affine alt küme denir.

Not 5.1.1. 1. Affine alt kümeler konvektir.

2. Boş küme ve tek noktalı kümeler affine kümelerdir.

Tanım 5.1.3. A bir küme ve $V, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$+ : V \times A \longrightarrow A \quad (v, a) \longmapsto v + a$$

işlemi ile birlikte A kümesine affine uzay denir;

1. $V \longrightarrow A \quad v \longmapsto v + a$ dönüşümü bijeksiyondur.

2. $v_1, v_2 \in V$ ve $a \in A$ için $(v_1 + v_2) + a = v_1 + (v_2 + a)$.

Teorem 5.1.1. $\{X_j\}_{j \in J}$, R^n 'e ait konveks (afine) alt kümeler ailesi olsun. o zaman $\bigcap_{j \in J} X_j$ konveks alt uzaydır.

İspat.

$$x, y \in \bigcap_{j \in J} X_j \quad (x \neq y)$$

olsun. $\forall j \in J$ için $x, y \in X_j$ 'dir. $\forall j \in J$ için X_j ler konveks alt küme olduğundan; $\forall j \in J$ için $(1-t)x+ty \in X_j$ 'dir. O halde $(1-t)x+ty \in \bigcap_{j \in J} X_j$ 'dir. $\square$

Tanım 5.1.4. X, R^n 'in bir alt kümesi olsun. X 'i içeren R^n 'e ait tüm konveks kümelerin arakesitine X 'in konveks hull'u denir.

Tanım 5.1.5.

- $p_0, p_1, \dots, p_m, R^n$ 'de noktalar olsun. $p_0, \dots, p_m$ noktalarının affine kombinasyonu

$$x = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_m p_m; \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1$$

şeklinde tanımlanır.

- $p_0, p_1, \dots, p_m$ noktalarının konveks kombinasyonu afin kombinasyondur öyleki $t_i \geq 0, i = 0, \dots, m$ 'dir. Yani

$$t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_m p_m; \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1 \quad \text{ve} \quad t_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m.$$

Örnek 5.1.1. x, y noktalarının konveks kombinasyonu

$$(1 - t)x + ty, \quad t \in [0, 1]$$

formundadır.

Teorem 5.1.2. $p_0, p_1, \dots, p_m, R^n$ 'de noktalar olsun. $p_0, \dots, p_m$ noktaları tarafından gerilen $[p_0, \dots, p_m]$ konveks küme, $p_0, \dots, p_m$ noktalarının konveks kombinasyonların kümesidir.

İspat. S , tüm konveks kombinasyonların kümesini gösterebilir.

$S = [p_0, p_1, \dots, p_m]$ eşitliğini göstermemiz gerekir. İlk önce $[p_0, p_1, \dots, p_m] \subset S$ olduğunu gösterelim. Bunun için S 'nin $p_0, \dots, p_m$ noktalarını içeren konveks küme olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

- $t_j = 1$ ve diğerleri için $t_j = 0$ olsun. Bu durumda;

$$t_0 p_0 + \dots + t_j p_j + \dots + t_m p_m; \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1, t_i \geq 0, i = 0, \dots, m$$

ve dolayısıyla $\Rightarrow \forall j$ için $p_j \in S$.

•

$$\alpha = \sum_{i=0}^m a_i p_i, \quad \beta = \sum_{i=0}^m b_i p_i \in S \quad (a_i, b_i \geq 0; \sum a_i = 1; \sum b_i = 1) \quad \text{olsun.}$$

$(1-t)\alpha + t\beta \in S$ olduğunu iddia ediyoruz.

$$(1-t)\alpha + t\beta = (1-t) \sum_{i=0}^m a_i p_i + t \sum_{i=0}^m b_i p_i = \sum_{i=0}^m ((1-t)a_i + tb_i) p_i \in S$$

çünkü

$$\sum_{i=0}^m (1-t)a_i + tb_i = (1-t) \sum_{i=0}^m a_i + t \sum_{i=0}^m b_i = 1, \quad (1-t)a_i + tb_i \geq 0.$$

Bunun sonucunda $[p_0, p_1, \dots, p_m] \subset S$.

$S \subset [p_0, p_1, \dots, p_m]$ bağıntısını gösterelim.

X , $p_0, \dots, p_m$ noktalarını içeren bir konveks küme ise $m \geq 0$ üzerinde tümevarım ile $S \subset X$ olduğunu gösterelim.

- $m = 0$ için $S = p_0$ 'dir.
- $m > 0$ olsun. $t_i \geq 0$ ve $\sum_{i=0}^m t_i = 1$ ise $p = \sum_{i=0}^m t_i p_i$ X e ait olup olmadığını görelim. $t_0 \neq 1$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi halde $p = p_0$ olabilir ve bir üstteki koşul içine düşer. Tümevarım hipotezinden

$$q = \frac{t_1}{1-t_0} p_1 + \frac{t_2}{1-t_0} p_2 + \dots + \frac{t_m}{1-t_0} p_m \in X$$

ve böylece $p = t_0 p_0 + (1-t_0)q \in X$ çünkü X konvektir. Dolayısıyla $S \subset X$ 'dir.

Sonuç olarak $S = [p_0, \dots, p_m]$ eşitliğini elde ederiz. $\square$

Sonuç 5.1.1. $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, R^n 'de noktalar olsun. $\{p_0, \dots, p_m\}$ noktalarının gerdiği afin küme bu noktaların afin kombinasyonunu içerir.

Tanım 5.1.6. R^n 'de $\{p_0, \dots, p_m\}$ noktalarının sıralı kümesini ele alalım. $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ kümesi R^n vektör uzayının lineer bağımsız alt uzayı ise $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ sıralı kümesine afin bağımsızdır denir.

Not 5.1.2.

1. R^n 'nin lineer bağımsız alt kümesi afin bağımsız kümedir. Tersisi doğru değildir çünkü orijin ile birlikte lineer bağımsız küme affine bağımsızdır.
2. Tek noktalı küme $\{p_0\}$ afin bağımsızdır çünkü $i \neq 0$ olmak üzere $p_i - p_0$ formunda noktalar yok ve $\emptyset$ boş kümesi lineer bağımsızdır.

3. $p_1 - p_0 \neq 0$ olması durumunda $\{p_0, p_1\}$ kümesi afin bağımsızdır .
4. $\{p_0, p_1, p_2, \}$ noktaları aynı doğru üzerinde değilse $\{p_0, p_1, p_2\}$ afin bağımsızdır.
5. $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ noktaları aynı düzlem üzerinde değilse $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ afin bağımsızdır.

Teorem 5.1.3. $\{p_0, \dots, p_m\}$, R^n 'de sıralı küme olsun. Aşağıdakiler denktir:

1. $\{p_0, \dots, p_m\}$ afin bağımsızdır.
2. $\{s_0, \dots, s_m\} \subset R$ kümesi

$$\sum_{i=0}^m s_i p_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^m s_i = 0$$

eşitsizliklerini doğruluyor ise $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$ dır.

3. $A, \{p_0, \dots, p_m\}$ tarafından gerilen afin küme olmak üzere $\forall x \in A$ elemanı afin kombinasyonu olarak tektürlü ifade edilir, yani

$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1.$$

İspat 5.1.1. 1) $\Rightarrow$ 2) : $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ afin bağımsız olsun. $\{s_0, \dots, s_m\} \subset R$ kümesi

$$\sum_{i=0}^m s_i p_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^m s_i = 0$$

eşitsizliklerini sağlasın.

$$\sum_{i=0}^m s_i p_i = \sum_{i=0}^m s_i p_i - \left(\sum_{i=0}^m s_i \right) p_0 = \sum_{i=0}^m s_i (p_i - p_0) = 0$$

$i = 1, \dots, m$ için $p_i - p_0$ lineer bağımsız çünkü $\{p_0, \dots, p_m\}$ afin bağımsız. O halde; $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 0$ 'dır.

$$\sum_{i=0}^m s_i = 0$$

olduğundan $s_0 = 0$ 'dır.

2) $\Rightarrow$ 3) : $x \in A$ alalım. Sonuç 5.1.1 den dolayı $x \in A$ elemanı afine kombinasyon olarak ifade edilir. Böylece $x \in A$ elemanın tek türlü ifade edildiğini göstereyim.

$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i, \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1$$

ve

$$x = \sum_{i=0}^m t'_i p_i, \quad \sum_{i=0}^m t'_i = 1$$

olduğunu varsayalım.

$$\sum_{i=0}^m t_i p_i = \sum_{i=0}^m t'_i p_i \Rightarrow \sum_{i=0}^m (t_i - t'_i) p_i = 0 \Rightarrow \forall i, t_i - t'_i = 0 \Rightarrow \forall i, t_i = t'_i.$$

3) $\Rightarrow$ 1) : $\forall x \in A$ elemanı $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ noktalarının afin kombinasyonu olarak tek türlü ifade edildiğini varsayalım. Yani $\{p_0, \dots, p_m\}$ kümesinin afin bağımsız olduğunu göstermeliyiz. Yani; $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz.

Varsayalım ki $\{p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ lineer bağımlı olsun. O halde;

$$\sum_{i=0}^m r_i (p_i - p_0) = 0$$

iken r_i (hepsi sıfır değil) vardır. $r_j \neq 0$ olsun. $r_j = 1$ alalım.

$p_j \in A$ ise

$$p_j = 1 \cdot p_j \\ p_j = - \sum_{i \neq j} r_i p_i + \left(\sum_{i \neq j} r_i + 1 \right) p_0$$

p_j iki türlü ifade edilemeyeceğinden çelişki.

O halde $\{p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ lineer bağımsızdır. $\square$

Sonuç 5.1.2. $\{p_0, \dots, p_m\}$ sıralı küme olsun. Afin bağımsızlık bu kümenin bir özellikliğidir.

Tanım 5.1.7. $\{a_1, \dots, a_k\}$, R^n 'de bir küme olsun. Bu kümenin $(n + 1)$ elemanı afin bağımsız küme oluşturuyorsa, $\{a_1, \dots, a_k\}$ kümesi genel pozisyonadadır denir.

Not 5.1.3. Genel pozisyonada olma özellikliliği n sayısına bağlıdır.

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, R^n 'de genel pozisyon olsun.

- $n = 1$ için $\{a_i, a_j\}$ afin bağımsız olmalıdır. Yani tüm noktalar farklı olmalı.
- $n = 2$ için üç nokta kolineer olmamalıdır.
- $n = 3$ için dört nokta kodüzlem olmamalıdır.

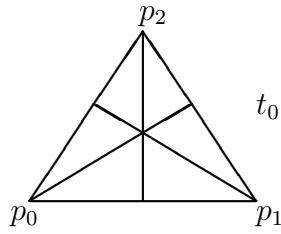
Teorem 5.1.4. $\forall k \geq 0$ için R^n Euclid uzayı genel pozisyonda k tane noktası vardır.

Tanım 5.1.8. $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, R^n 'de afin bağımsız alt küme olsun. A 'da bu alt küme tarafından gerilen bir afin küme olsun. $x \in A$ ise Teorem 5.1.3'den

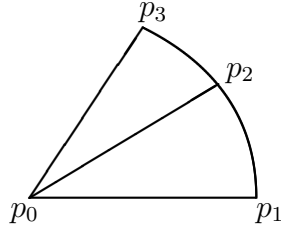
$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i, \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1.$$

$(t_0, t_1, \dots, t_m)$, $(m+1)$ -bileşenine x elemanın bary-centric koordinatıdır.

$$p_0 \text{-----} p_1 \quad t_0 = t_1 = \frac{1}{2}$$



$$t_0 = t_1 = t_2 = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$$



$$x = \frac{1}{4}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$$

$$\text{Genel hali: } \frac{1}{m+1}(p_0 + \dots + p_m) = x$$

Tanım 5.1.9. $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, R^n 'de afin bağımsız alt küme olsun. Bu alt küme tarafından gerilen konveks kümeye m -simpleks denir. $[p_0, p_1, \dots, p_m]$ ile gösterilir (p_i 'ler köşeler olarak adlandırılır).

Teorem 5.1.5. $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ afin bağımsız olsun. Bu durumda $[p_0, \dots, p_m]$ m -simpleksinin her x elemanı;

$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i, \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, m$$

formunda tek türlü yazılır.

Tanım 5.1.10. $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ afin bağımsız olsun. $[p_0, \dots, p_m]$ m -simpleksinin baricentrik koordinatı;

$$\frac{1}{m+1}(p_0 + p_1 + \dots + p_m).$$

$$(t_0 = t_1 = \dots = t_m = \frac{1}{m+1})$$

Not 5.1.4. Barisentrik sözcüğü ağırlık anlamında *barys* yunanca kelimesinde gelmektedir. Dolayısıyla barisentrik, *ağırlık merkezi* anlamındadır

Örnek 5.1.2.

- $[p_0]$ barisentrik'i kendisidir.
- $[p_0, p_1]$ 1-simpleksinin barisentrik'i $\frac{1}{2}(p_0 + p_1)$ 'dir.
- $[p_0, p_1, p_2]$ 2-simpleksinin barisentrik'i $\frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$ 'dir.
- $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^{n+1}$ olmak üzere $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ afin bağımsızdır. $[e_0, e_1, \dots, e_n]$,

$$x = \sum_{i=0}^n t_i e_i$$

formundaki tüm konveks kombinasyonu içerir. $[e_0, e_1, \dots, e_n]$ 'in barisentrik koordinatı $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ 'dir.

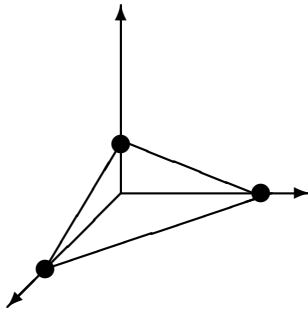
$$p_0 = (1, 0, 0, 0, 0 \dots) = e_0,$$

$$p_1 = (0, 1, 0, 0, 0 \dots) = e_1,$$

$$p_2 = (0, 0, 1, 0, 0 \dots) = e_2,$$

$$p_3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots) = e_3,$$

.....



Tanım 5.1.11. $[p_0, p_1, \dots, p_m]$ m -simpleks olsun. p_i noktasının ters yüzü

$$[p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m] = \left\{ \sum_{j=0}^m t_j p_j \mid \sum_{j=0}^m t_j = 1, \quad t_j \geq 0 \right\}.$$

$[p_0, p_1, \dots, p_m]$ m -simpleksinin sınırı bu ters yüzlerin birleşimi şeklinde tanımlanır.

• 0-simplekste p_0 'in tersyüzü kendisi
 p_0

1-simplekste p_1 'in tersyüzü p_0 'dır.
 p_0 p_1

2-simplekste p_2 'nin ters yüzü p_0p_1 doğru parçası
 p_0 p_1 p_2

3-simplekste p_0 'nin ters yüzü $[p_1, p_2, p_3]$ 2-simplekstir
 p_0 p_1 p_2 p_3

Not 5.1.5. 1. Bir m -simpleksin $m + 1$ tane yüzü vardır.

2. $[p_0, p_1, \dots, p_m]$ simpleksinin k -yüzü, $k + 1$ köşe tarafından gerilen bir k -simplekstir.

Teorem 5.1.6. S n -simpleksi, $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ ile gösterilsin.

- i. $u, v \in S$ ise $\|u - v\| \leq \sup \|u - p_i\|$.
- ii. $\text{diam} S = \sup \|p_i - p_j\|$.
- iii. b, S 'nin barisentrik'i ise $\|b - p_i\| \leq \frac{n}{n+1} (\text{diam} S)$.

$$i. \quad v = \sum_{i=0}^n t_i p_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{olsun.}$$

$$\|u - v\| = \|u - \sum_{i=0}^n t_i p_i\| = \|(\sum_{i=0}^n t_i)u - \sum_{i=0}^n t_i p_i\| \quad (5.1)$$

$$= \|\sum_{i=0}^n t_i(u - p_i)\| \leq \sum_{i=0}^n \|t_i(u - p_i)\| = \sum_{i=0}^n t_i \|u - p_i\| \quad (5.2)$$

$$\leq (\sum_{i=0}^n t_i) \text{Sup } \|u - p_i\| = \text{Sup } \|u - p_i\| \quad (5.3)$$

$$ii. \quad \|u - p_i\| \leq \text{Sup } \|p_j - p_i\|' \text{ dir.}$$

ap tanimından; $\text{diam} S = \text{Sup } \|p_i - p_j\|$

$$iii. \quad b = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n p_j$$

olmak zere;

$$\begin{aligned} \|b - p_i\| &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n p_j - p_i \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n p_j - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n p_i \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n (p_j - p_i) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \text{Sup } \|p_j - p_i\| \\ &\quad (i = j, \quad \|p_j - p_i\|) \\ &= \frac{n}{n+1} \text{Sup } \|p_j - p_i\| = \frac{n}{n+1} \text{diam} S \end{aligned}$$

Tanım 5.1.12. $\{p_0, \dots, p_m\}$ kümesi afin bağımsız ve A , bu noktaların gerdiği afin küme olsun.

$$T : A \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \sum_{i=0}^m t_i p_i \longmapsto T\left(\sum_{i=0}^m t_i p_i\right) = \sum_{i=0}^m t_i T(p_i).$$

T 'nin $S = [p_0, \dots, p_m]$ 'ye kısıtlanması yine bir afin dönüşümdür.

- Not 5.1.6.** 1. Afin dönüşüm, afin kombinasyonu ve konveks kombinasyonu korur.
2. Afin dönüşüm, afin bağımsız küme üzerinde aldığı değerle belirlenebilir.
3. $p_0, \dots, p_m$ noktalarının bary centric koordinatın tekliği bu tür T dönüşümlerin varlığını gösterir.

Teorem 5.1.7. $[p_0, \dots, p_m]$ m-simpleks, $[q_0, \dots, q_n]$ n simpleks ve $f : \{p_0, \dots, p_m\} \longrightarrow [q_0, \dots, q_n]$ bir fonksiyon olsun. $T(p_i) = f(p_i)$ olacak şekilde bir tek $T : [p_0, \dots, p_m] \longrightarrow [q_0, \dots, q_n]$ dönüşümü mevcuttur.

$$\text{Y.G: } T(\sum_{i=0}^m t_i p_i) = \sum_{i=0}^m t_i f(p_i)$$

5.2 Simplisiyal Kompleksler

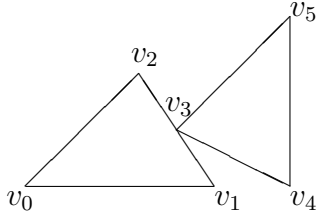
$S = [v_0, v_1, \dots, v_q]$ q-simpleks olsun. Bu simplekslerin köşelerinin kümesi $Ver(S) = \{v_0, \dots, v_q\}$ ile gösterilsin.

Tanım 5.2.1. S bir simpleks olsun. Eğer $Ver(S') \subset Ver(S)$ ise S' ne S simpleksinin yüzü denir. Eğer $Ver(S') \subsetneq Ver(S)$ ise S' ne S simpleksinin has yüzü denir.

Tanım 5.2.2. Sonlu simplisiyal kompleks K aşağıdaki özelliklerini sağlayan simplekslerin koleksiyonudur.

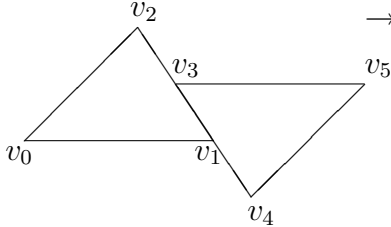
- i. $s \in K$ ise s nin yüzü de K ya aittir.
- ii. $s, t \in K$ ise bu iki simpleksin arakesiti ya boştur ya da bu iki simpleksin ortak yüzüdür.

Örnek 5.2.1.



$$[v_1, v_2] \cap [v_3, v_5] = [v_3] \rightarrow v_3 \text{ ortak yüz değildir.}$$

$\rightarrow$ simplisiyal kompleks değil.



$\rightarrow$ simplisiyal kompleks değil. v_1, v_3 ortak yüz değil.

Tanım 5.2.3. 1. K bir simplisiyal kompleks olsun. K 'nın underlying uzayı

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s$$

şeklinde tanımlanır. $(K, R^n$ 'in alt uzayı)

- 2. X topolojik uzayı verilsin. Eğer K simplisiyal kompleks ve $h : |K| \rightarrow X$ homeomorfizma varsa X 'e polyhedron denir. (K, h) ikili-sine X 'in üçgenleştirilmesi denir.

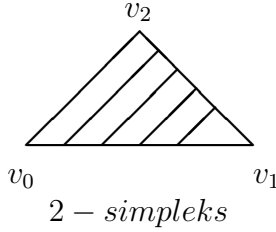
Not 5.2.1. • (K) , Euclid uzayının kompakt alt uzayıdır.

- s, K 'da bir simpleks ise $|s| = s$ 'dir.

Örnek 5.2.2.

$$\Delta^2 = \left\{ \sum_{i=0}^2 t_i v_i \mid \sum_{i=0}^2 t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2 \right\}$$

standart 2-simpleks ($\Delta^2 \subset R^n$) $K = \Delta^2$ standart 2-simpleksindeki tüm 0-simpleks ve tüm 1-simplekslerin koleksiyonu olsun.



$$K = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2]\}$$

K simplisiyal komplekslerin koleksiyonu iki koşulu da sağlar.
 K underlying uzayı üçgen olacaktır.

$$L : |K| = \triangle_{v_0 v_1 v_2} \longrightarrow X = S^1$$

homeorfizması var.

O halde çember polyhedrondur.

Tanım 5.2.4. K ve L iki simplisiyal kompleks olsun. $\{p_0, p_1, \dots, p_q\}$ noktaları, K 'da bir simpleksi gererken $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_q)\}$ noktaları L 'de bir simpleksi gerecek şekilde tanımlanan $\varphi : K \rightarrow L$ fonksiyona simplisiyal dönüşüm denir.

Tanım 5.2.5. K ve L iki simplisiyal kompleks olmak üzere $\varphi : K \rightarrow L$, K daki köşeler ile L deki köşeler arasında biyektif ise φ 'ye K ve L arasında bir izomorfizm denir. K ve L ye de izomorfik simplisiyal kompleksler denir.

Önerme 5.2.1. Simplisiyal dönüşümlerin birleşimide simplisiyal dönüşümdür.

İspat 5.2.1. İspat okuyucuya ödev olarak bırakılmıştır □

Tanım 5.2.6. $\forall i$ için $t_i > 0$ olacak şekilde $\sum_{i=1}^m t_i p_i$ noktalarına ait P simpleksin alt kümesine P 'nin içi denir. P° ile gösterilir.

Örneğin, bir 0-simpleksin içi kendisidir. Ayrıca bir dijital m -simpleks açık simplekslerin ayrık birleşimi olduğu gözlenmelidir.

Tanım 5.2.7. K bir m -simplisiyal kompleks ve $p \in Ver(K)$ olsun. O zaman p nin yıldızı

$$st(p) = \cup P^\circ$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P \in K$ ve $p \in Ver(K)$.

Tanım 5.2.8. K bir simplisiyal kompleks olsun.

$$dim K = \sup_{s \in K} \{dim(s)\}.$$

Teorem 5.2.1. K ve L iki simplisiyal kompleks olsun. Eğer $f : |K| \rightarrow |L|$ homeomorfizm ise $dim K = dim L$ 'dir.

Tanım 5.2.9. K ve L iki simplisiyal kompleks olmak üzere $\varphi : K \rightarrow L$ simplisiyal dönüşüm ve $f : |K| \rightarrow |L|$ sürekli dönüşüm olsun. K nın her köşesi p için

$$f(st(p)) \subset st(\phi(p))$$

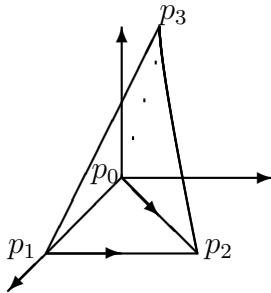
ise φ dönüşümü f 'ye simplisiyal yaklaşıyor denir.

Önerme 5.2.2. φ simplisiyal dönüşümünün yaklaşımı f olsun.

- f süreklidir.
- f homeomorfizm olması için gerek ve yeter şart φ izomorfizmdir.
- $f_1 : |K| \rightarrow |L|$ fonksiyonu $\varphi_1 : K \rightarrow L$ dönüşümünün yaklaşımı ve $f_2 : |L| \rightarrow |K|$ fonksiyonu $\varphi_2 : L \rightarrow M$ simplisiyal dönüşümünün yaklaşımı ise $f_2 \circ f_1 : |K| \rightarrow |M|$, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 'in simplisiyal yaklaşım fonksiyonudur.

İspat 5.2.2. İspat okuyucuya ödev olarak bırakılmıştır. □

Örnek 5.2.3. $p_0 = (0, 0, 0)$, $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (1, 2, 0)$, $p_3 = (2, 3, 4)$



Bu üçgen prizmanın sınırları bir simplisiyal kompleks oluşturur.

⊗ 0-simpleksler:

$$\sigma_1^0 = p_0, \quad \sigma_2^0 = p_1, \quad \sigma_3^0 = p_2, \quad \sigma_4^0 = p_3$$

⊗ 1-simpleksler:

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= (p_0, p_1), \quad \sigma_2^1 = \langle p_0, p_2 \rangle, \quad \sigma_3^1 = \langle p_0, p_3 \rangle, \quad \sigma_4^1 = \langle p_1, p_2 \rangle, \\ \sigma_5^1 &= \langle p_1, p_3 \rangle, \quad \sigma_6^1 = \langle p_2, p_3 \rangle \end{aligned}$$

⊗ 2-simpleksler:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \langle p_0, p_1, p_2 \rangle, \quad \sigma_2^2 = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle, \quad \sigma_3^2 = \langle p_0, p_2, p_3 \rangle, \\ \sigma_4^2 &= \langle p_0, p_1, p_3 \rangle \end{aligned}$$

Bölüm 6

SİMLİSİYAL HOMOLOJİ GRUPLARI

6.1 Serbest Abel Gruplar

Tanım 6.1.1. B, F abel grubunun alt kümesi olsun. Her $b \in B$ için $\langle b \rangle$ devirli altgrubu sonsuz ve $F = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle$ ise F ye B bazlı **serbest abel grup** denir.

Dolayısıyla bir serbest abel grup $\mathbb{Z}$ gruplarının direkt toplamıdır. F serbest abel grubun tipik elemanı

$$x = \sum m_b b$$

formunda tek türlü ifade edilir. Burada $m_b \in \mathbb{Z}$ ve m_b nin hemen hemen hepsi sıfırdır (tümü fakat m_b nin sonlu sayıda olması)

Not 6.1.1. • Serbest abel grubun bazları, vektör uzayının bazları gibi hareket ederler(davranırlar).

- Bu abel grubun bazlar üzerinde çakışan iki homomorfizma eşit olmalıdır. Yani bir kümesi üzerinde bir tek homomorfizm tanımlanır.

Teorem 6.1.1. F, B bazlı serbest abel grup olsun.

1. G serbest abel grup ve $\varphi : B \longrightarrow G$ bir fonksiyon ise Her $b \in B$ için, $\tilde{\varphi} \circ i(b) = \varphi(b)$ olacak şekilde bir tek homomorfizması $\tilde{\varphi} : F \longrightarrow G$

$$\begin{array}{ccc}
F & & \\
\downarrow i & \searrow \bar{\varphi} & \\
B & \xrightarrow{\varphi} & G
\end{array}$$

vardır.

2. F serbest abel grup olmak üzere her abel grup G , F/R bölüm grubuna izomorftur.

İspat 6.1.1. i) F serbest abel grubuna ait her elemanın

$$x = \sum m_b b$$

yazılabildiğini biliyoruz. O zaman

$$\bar{\varphi} : F \longrightarrow G \quad x \longmapsto \bar{\varphi}(x) = \sum m_b \varphi(b)$$

şeklinde tanımlansın. x elemanın tek türlü ifade edilmesinden $\bar{\varphi}$ iyi-tanımlı homomorfizmadır. Bir önceki notun ikinci kısmından $\bar{\varphi}$ tektir.

ii) Her $x \in G$ için, üretici b_x olan $\mathbb{Z}_{b_x}$ sonlu olmayan devirli grubunu seçelim. Dolayısıyla $B = \{b_x \mid x \in G\}$ bazlı

$$F = \sum_{x \in G} \mathbb{Z}_{b_x}$$

serbest abel gruptur.

$$\varphi : B \longrightarrow G \quad b_x \longmapsto \varphi(b_x) = x$$

şeklinde fonksiyonu tanımlayalım. φ sürjektif olduğundan $\bar{\varphi}$ homomorfizması sürjektifdir. Birinci izomorfizma teoreminden $G \cong F/\text{Ker } \bar{\varphi}$. $\square$

Teorem 6.1.2. Verilen T kümesi için, T yi baz kabul eden bir serbest abel grup F vardır.

İspat 6.1.2. $T = \emptyset$ ise $F = 0$ dir. Aksi halde her $t \in T$ için elemanları mt olan $\mathbb{Z}_t$ toplamsal grubunu tanımlayalım. $\mathbb{Z}_t$ nin üretici t olan bir sonsuz devirli grup olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla $F = \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}_t$ grubu t inci koordinat sıfırdan farklı olmak üzere b_t baz elemanlarından oluşan bir serbest abel gruptur. $\square$

Teorem 6.1.3. F serbest abel grubun her hangi iki bazın kardinalitesi eşittir.

İspat 6.1.3. Okuyucuya bırakılmıştır.

Tanım 6.1.2. F , B bazlı serbest abel grup ise F nin rankı B nin kardinalisine eşittir.

Şimdi herhangi bir abel grubun rankını tanımlayabiliriz;

Tanım 6.1.3. G bir abel grup olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde G nin bir F abel alt grubu varsa G nin rankı r dir denir;

1. rank $F = r$;
2. G/F burulmalı(torsiyon).

6.2 Simplisiyal Zincir Kompleksler

Tanım 6.2.1. K oriented (yönlü) simplisiyal kompleks olsun. $q \geq 0$ olmak üzere $C_q(K)$ aşağıdaki özelliklere sahip abel gruptur.

* **Üreteçler:**

$p_i \in Ver K$ olmak üzere $(p_0, p_1, \dots, p_q)$ noktalarından oluşacak öyleki $\{p_0, p_1, \dots, p_q\}$, K 'daki bir simpleksi girmesi gerekir.

* **Bağıntılar:**

- i. Eğer bir kenar tekrarlırsa $(p_0, p_1, \dots, p_q) = 0$ 'dır.
- ii. $(p_0, p_1, \dots, p_q) = Sgn(\pi)(p_{\pi(0)}, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(q)})$

$C_q(K)$ 'nın elemanını $\langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle$ ile göstereceğiz.

Lemma 6.2.1. K m -boyutlu simplisiyal kompleks olsun.

$C_q(K)$, bazıları $\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ olan serbest abel gruptur.

$q > m$ ise $C_q(K) = 0$ 'dır.

Tanım 6.2.2. $\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$

$$\begin{aligned} \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle &\mapsto \partial_q(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle \end{aligned}$$

Örnek olarak;

$$\begin{aligned} \partial_2(\langle p_0, p_1, p_2 \rangle) &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i \langle p_0, \hat{p}_i, p_2 \rangle \\ &= \langle p_1, p_2 \rangle - \langle p_0, p_2 \rangle + \langle p_0, p_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle, \langle p_0, p_1 \rangle, \langle p_0, p_2 \rangle \in C_1(K)$$

Böylelikle baz elemanların lineer birleşimi ifade edilmiş oldu.

Teorem 6.2.1. K m-boyutlu simplisiyal kompleks olsun. O zaman;

$$0 \longrightarrow C_m(K) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0$$

bir zincir komplekstir. $(\partial_{m-1} \circ \partial_m = 0)$

Tanım 6.2.3. K ve L iki simplisiyal kompleks olmak üzere $\phi : K \longrightarrow L$ simplisiyal dönüşümü $\phi_* : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ aşağıdaki gibi lineer dönüşüm indirger;

$$\phi_*(\{p_0, \dots, p_q\}) = \begin{cases} \{\phi(p_0), \dots, \phi(p_q)\}, & \text{L deki bir simpleksi gerer} \\ 0, & \text{L deki bir simpleksi germez} \end{cases}$$

Tanımdan Aşağıdaki önermeyi verebiliriz;

Önerme 6.2.1. $\varphi : K \longrightarrow L$ ve $\psi : L \longrightarrow M$ iki simplisiyal dönüşüm olsun. $\psi \circ \varphi : K \longrightarrow M$ bileşkesi

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

eşitliğini gerçekleyen $(\psi \circ \varphi)_* : C_q(K) \longrightarrow C_q(M)$ dönüşümünü üretir.

Simplisiyal dönüşüm ile sınır homomorfizması arasındaki ilişki şöyledir;

Önerme 6.2.2. $\varphi : K \longrightarrow L$ simplisiyal dönüşüm ise

$$\partial \circ \varphi_* = \varphi_* \circ \partial : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(L).$$

İspat 6.2.1. $\{p_0, \dots, p_q\}$, K da bir q -simpleksi gersin. O zaman

$$\begin{aligned} \partial \circ \varphi_*(\{p_0, \dots, p_q\}) &= \partial(\{\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q)\}) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \{\varphi(p_0), \dots, \hat{\varphi}(p_i), \dots, \varphi(p_q)\} \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \varphi_*(\{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q\}) \\ &= \varphi_*\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q\}\right) \\ &= \varphi_* \circ \partial(\{p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q\}) \end{aligned}$$

6.3 Simplisiyal Homoloji Grupları

Tanım 6.3.1. K oriented simplisiyal kompleks olsun.

- $Z_q(K) = Ker \partial_q$

$$= \{ \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q(K) \mid \partial_q(\langle p_0, \dots, p_q \rangle) = 0 \}$$

grubuna q -devir grubu denir.

- $B_q(K) = Im \partial_{q+1}$

$$= \{ \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \in C_q(K) \mid \partial_{q+1}(\langle p_0, \dots, p_{q+1} \rangle) = \langle p_0, p_1, \dots, p_q \rangle \}$$

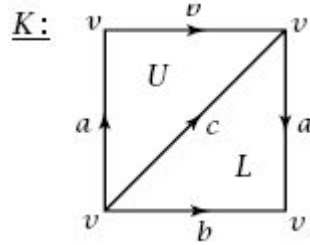
grubuna q -sınır grubu denir.

Lemma 6.3.1. $B_q(K) \subset Z_q(K) \subset C_q(K)$ 'dir.

Tanım 6.3.2. $H_q(K) = \frac{Z_q(K)}{B_q(K)}$ grubuna q . boyutta simplisiyal homoloji grubu denir.

Klein Şişesi

1 tane 0-simpleks $[v]$ var. O halde $C_0(Kb) \cong \mathbb{Z}$



3 tane 1-simpleks $[a], [b], [c]$ var. O halde $C_1(Kb) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

2 tane 2-simpleks $[U], [L]$ var. O halde $C_2(Kb) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Ve $q \geq 3$ için $C_q(Kb) \cong \{0\}$ dir.

$$0 \longrightarrow C_2(Kb) \longrightarrow C_1(Kb) \longrightarrow C_0(Kb) \longrightarrow 0$$

Buradan;

$$Ker \partial_0 = C_0(Kb) \cong \mathbb{Z} \text{ ve } Im \partial_3 = \{0\} \text{ dir.}$$

$$\partial_2 : C_2(Kb) \longrightarrow C_1(Kb)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall p U + q L \in C_2(Kb)$ için

$$\begin{aligned} \partial_2(pU + qL) &= p \partial_2(U) + q \partial_2(L) = p (-a - b + c) + q (-c - a + b) \\ &= -(p + q) a + (q - p) (b - c) \end{aligned}$$

$(-a - b + c) + (-c - a + b) = 2a$ olur. O halde üreteçlerimiz $2a$ ve $b - a - c$ dir. Buradan; $Im \partial_2 \cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir.

Şimdi ∂_2 nin çekirdeğini hesaplayalım.

$\partial_2(pU + qL) = 0$ olsun. O zaman $-(p + q) a + (q - p) (b - c) = 0$
 $\iff p = q = 0$ dir. O halde $Ker \partial_2 \cong \{0\}$ dir.

$$\partial_1 : C_1(Kb) \longrightarrow C_0(Kb)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall r_1 a + r_2 b + r_3 c \in C_1(Kb)$ için

$$\partial_1(r_1 a + r_2 b + r_3 c) = r_1 \partial_1(a) + r_2 \partial_1(b) + r_3 \partial_1(c) = r_1 (v - v) + r_2 (v - v) + r_3 (v - v) = 0 \text{ elde edilir.}$$

O zaman; $Ker \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ve $Im \partial_1 \cong \{0\}$ dir.

Artık Klein Şişesinin homoloji gruplarını hesaplayabiliriz.

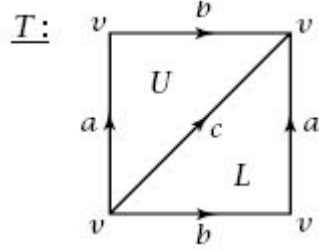
$$H_0(Kb) = \frac{Ker \partial_0}{Im \partial_1} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}$$

$$H_1(Kb) = \frac{Ker \partial_1}{Im \partial_2} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_2(Kb) = \frac{Ker \partial_2}{Im \partial_3} \cong \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}$$

$$H_q(Kb) = \{0\} \quad q \geq 3 \text{ dir.}$$

Tor



1 tane 0-simpleks $[v]$ var. O halde $C_0(Kb) \cong \mathbb{Z}$
 3 tane 1-simpleks $[a], [b], [c]$ var. O halde $C_1(Kb) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 2 tane 2-simpleks $[U], [L]$ var. O halde $C_2(Kb) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Ve $q \geq 3$ için $C_q(Kb) \cong \{0\}$ dir.

$$0 \longrightarrow C_2(T) \longrightarrow C_1(T) \longrightarrow C_0(T) \longrightarrow 0$$

Buradan;

$$Ker \partial_0 = C_0(T) \cong \mathbb{Z} \text{ ve } Im \partial_3 = \{0\} \text{ dir.}$$

$$\partial_2 : C_2(T) \longrightarrow C_1(T)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall pU + qL \in C_2(T)$ için

$$\begin{aligned} \partial_2(pU + qL) &= p \partial_2(U) + q \partial_2(L) = p(-a - b + c) + q(a + b - c) \\ &= p(-a - b + c) + q(a + b - c) = (p - q)(c - a - b) \end{aligned}$$

O halde $Im \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ olur.

Şimdi ∂_2 nin çekirdeğini hesaplayalım.

$$\partial_2(pU + qL) = 0 \text{ olsun. O zaman } (p - q)(c - a - b) = 0 \implies p = q \text{ dir.}$$

O halde $Ker \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ dir.

$$\partial_1 : C_1(T) \longrightarrow C_0(T)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall r_1a + r_2b + r_3c \in C_1(T)$ için

$\partial_1(r_1a + r_2b + r_3c) = r_1 \partial_1(a) + r_2 \partial_1(b) + r_3 \partial_1(c) = r_1 (v - v) + r_2 (v - v) + r_3 (v - v) = 0$ elde edilir.

O zaman; $Ker\partial_1 = C_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ve $Im\partial_1 \cong \{0\}$ dir.

Artık Tor'un homoloji gruplarını hesaplayabiliriz.

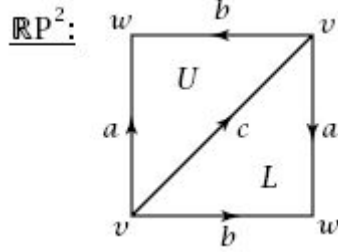
$$H_0(T) = \frac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}$$

$$H_1(T) = \frac{Ker\partial_1}{Im\partial_2} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_2(T) = \frac{Ker\partial_2}{Im\partial_3} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}$$

$$H_q(T) = \{0\} \quad q \geq 3 \text{ dir.}$$

Reel Projektif Düzlem



2 tane 0-simpleks $[v], [w]$ var. O halde $C_0(RP^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 3 tane 1-simpleks $[a], [b], [c]$ var. O halde $C_1(RP^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 2 tane 2-simpleks $[U], [L]$ var. O halde $C_2(RP^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Ve $q \geq 3$ için $C_q(RP^2) \cong \{0\}$ dir.

$$0 \longrightarrow C_2(RP^2) \longrightarrow C_1(RP^2) \longrightarrow C_0(RP^2) \longrightarrow 0$$

Buradan;

$$Ker \partial_0 = C_0(RP^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ ve } Im \partial_3 = \{0\} \text{ dir.}$$

$$\partial_2 : C_2(RP^2) \longrightarrow C_1(RP^2)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall pU + qL \in C_2(RP^2)$ için

$$\begin{aligned} \partial_2(pU + qL) &= p \partial_2(U) + q \partial_2(L) = p(-a + b + c) + q(-a + b - c) \\ &= -a(p + q) + b(p + q) + c(p - q) \\ &= (p + q)(b - a) + (p - q)c \end{aligned}$$

$-a + b + c - a - c + b = 2(b - a)$ olur. O halde üreteçlerimiz $2(b - a)$ ve $-a - c + b$ dir. Buradan $Im \partial_2 \cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dir.

Şimdi ∂_2 nin çekirdeğini hesaplayalım.

$\partial_2(pU + qL) = 0$ olsun. O zaman $(p + q)(b - a) + (p - q)c = 0 \iff p = q = 0$ dir. O halde $Ker \partial_2 = \{0\}$ dir.

$$\partial_1 : C_1(RP^2) \longrightarrow C_0(RP^2)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall r_1a + r_2b + r_3c \in C_1(T)$ için

$$\begin{aligned}\partial_1(r_1a + r_2b + r_3c) &= r_1 \partial_1(a) + r_2 \partial_1(b) + r_3 \partial_1(c) = r_1 (w - v) + r_2 (w - v) + r_3 (v - v) \\ &= (w - v) (r_1 + r_2) \text{ dir.}\end{aligned}$$

O zaman üreteç bir tanedir. Buradan $Im\partial_1 \cong \mathbb{Z}$ olur.

$\partial_1(r_1a + r_2b + r_3c) = 0$ olsun. O zaman $(w - v) (r_1 - r_2) = 0 \implies r_1 = -r_2$ dir. Buradan $Ker\partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olur.

Reel Projektif Düzlemin homoloji gruplarını hesaplayabiliriz.

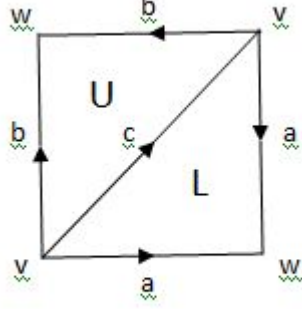
$$H_0(RP^2) = \frac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

$$H_1(RP^2) = \frac{Ker\partial_1}{Im\partial_2} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(RP^2) = \frac{Ker\partial_2}{Im\partial_3} \cong \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}$$

$$H_q(RP^2) = \{0\} \quad q \geq 3 \text{ dir.}$$

Küre



2 tane 0-simpleks $[v], [w]$ var. O halde $C_0(S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 3 tane 1-simpleks $[a], [b], [c]$ var. O halde $C_1(S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 2 tane 2-simpleks $[U], [L]$ var. O halde $C_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Ve $q \geq 3$ için $C_q(S^2) \cong \{0\}$ dir.

$$0 \longrightarrow C_2(S^2) \longrightarrow C_1(S^2) \longrightarrow C_0(S^2) \longrightarrow 0$$

Buradan;

$$Ker \partial_0 = C_0(S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ ve } Im \partial_3 = \{0\} \text{ dir.}$$

$$\partial_2 : C_2(S^2) \longrightarrow C_1(S^2)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall pU + qL \in C_2(S^2)$ için

$$\begin{aligned} \partial_2(pU + qL) &= p \partial_2(U) + q \partial_2(L) = p(-b + b + c) + q(-a + a - c) \\ &= c(p - q) \end{aligned}$$

O halde üreticimiz " c " bir tanedir. Buradan $Im \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ dir.

Şimdi ∂_2 nin çekirdeğini hesaplayalım.

$\partial_2(pU + qL) = 0$ olsun. O zaman $c(p - q) = 0 \implies p = q$ dir. Üreticimiz bir tane olduğundan $Ker \partial_2 = \mathbb{Z}$ dir.

$$\partial_1 : C_1(S^2) \longrightarrow C_0(S^2)$$

homomorfizmasını ele alalım. $\forall r_1a + r_2b + r_3c \in C_1(T)$ için

$$\begin{aligned} \partial_1(r_1a + r_2b + r_3c) &= r_1 \partial_1(a) + r_2 \partial_1(b) + r_3 \partial_1(c) = r_1 (w - v) + r_2 (w - v) + r_3 (v - v) \\ &= (w - v) (r_1 - r_2) \text{ dir.} \end{aligned}$$

O zaman üreteç bir tanedir. Buradan $Im \partial_1 \cong \mathbb{Z}$ olur.

$\partial_1(r_1a + r_2b + r_3c) = 0$ olsun. O zaman $(w - v) (r_1 - r_2) = 0 \implies r_1 = r_2$ dir. Buradan $Ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}$ olur.

Kürenin homoloji gruplarını hesaplayabiliriz.

$$H_0(S^2) = \frac{Ker \partial_0}{Im \partial_1} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

$$H_1(S^2) = \frac{Ker \partial_1}{Im \partial_2} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \{0\}$$

$$H_2(S^2) = \frac{Ker \partial_2}{Im \partial_3} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}$$

$$H_q(S^2) = \{0\} \quad q \geq 3 \text{ dir.}$$

Teorem 6.3.1.

1. $K = \emptyset$ ise $H_0(K) = 0$ 'dir.
2. $K = \{x_0\}$ bir 0-simpleks ise $H_0(K) = 0$, $i \geq 1$

İspat 6.3.1.

1. $K = \emptyset$ olsun.

$$C_0(K) = 0, \quad C_1(K) = 0, \quad C_2(K) = 0; \quad C_i(K) = 0 \quad i \geq 3$$

$$0 \xrightarrow{\partial_4} C_3(K) \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \rightarrow 0$$

$$Z_0(K) = Ker \partial_0 = 0 \quad B_0(K) = Im \partial_1 = 0.$$

$$\text{Dolayısıyla} \quad H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \{0\}.$$

2. $K = \{x_0\}$ olsun.

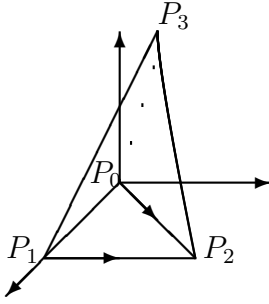
$$C_0(K) = \langle x_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}, \quad C_i(K) = \{0\} \quad i \geq 1$$

$$0 \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$Z_0(K) = \text{Ker} \partial_0 = C_0(K) \simeq Z, \quad B_0(K) = \text{Im} \partial_1 = \{0\}.$$

Böylece $H_0(K) \simeq Z$. □

Örnek 6.3.1. $p_0 = (0, 0, 0), \quad p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = (1, 2, 0), \quad p_3 = (2, 3, 4)$



$$\sigma_1^0 = \langle p_0 \rangle, \quad \sigma_2^0 = \langle p_1 \rangle, \quad \sigma_3^0 = \langle p_2 \rangle, \quad \sigma_4^0 = \langle p_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= \langle p_0, p_1 \rangle, & \sigma_2^1 &= \langle p_0, p_2 \rangle, & \sigma_3^1 &= \langle p_0, p_3 \rangle, & \sigma_4^1 &= \langle p_1, p_2 \rangle \\ \sigma_5^1 &= \langle p_1, p_3 \rangle, & \sigma_6^1 &= \langle p_2, p_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \langle p_0, p_1, p_2 \rangle, & \sigma_2^2 &= \langle p_1, p_2, p_3 \rangle, & \sigma_3^2 &= \langle p_0, p_2, p_3 \rangle \\ \sigma_4^2 &= \langle p_0, p_1, p_3 \rangle \end{aligned}$$

$$C_0(K) = \langle \sigma_1^0 \rangle \oplus \langle \sigma_2^0 \rangle \oplus \langle \sigma_3^0 \rangle \oplus \langle \sigma_4^0 \rangle \simeq Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z \simeq Z^4$$

$$C_1(K) = \langle \sigma_1^1 \rangle \oplus \langle \sigma_2^1 \rangle \oplus \langle \sigma_3^1 \rangle \oplus \langle \sigma_4^1 \rangle \oplus \langle \sigma_5^1 \rangle \oplus \langle \sigma_6^1 \rangle \simeq Z^6$$

$$C_2(K) = \langle \sigma_1^2 \rangle \oplus \langle \sigma_2^2 \rangle \oplus \langle \sigma_3^2 \rangle \oplus \langle \sigma_4^2 \rangle \simeq Z^4$$

$$C_i(K) = 0 \quad i \geq 3$$

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \\ 0 &\xrightarrow{\partial_3} Z^4 \xrightarrow{\partial_2} Z^6 \xrightarrow{\partial_1} Z^4 \xrightarrow{\partial_0} 0 \end{aligned}$$

$$Z_0(K) = Ker \partial_0 = C_0(K) \simeq Z^4$$

$$B_0(K) = Im \partial_1 = \{a_1 < \sigma_1^0 > + a_2 < \sigma_2^0 > + a_3 < \sigma_3^0 > + a_4 < \sigma_4^0 > | \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\} \approx Z^3 \text{ (Üreteç sayısı 3)}$$

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \approx \frac{Z^4}{Z^3} \approx Z$$

Hatırlatma:

$$\partial_i(< p_0, p_1, \dots, p_m >) = \sum_{i=0}^m (-1)^i < p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m >$$

$$\partial_1(\sigma_1^1) = p_1 - p_0$$

$$\partial_1(\sigma_2^1) = p_2 - p_0$$

$$\partial_1(\sigma_3^1) = p_3 - p_0$$

$$\partial_1(\sigma_4^1) = p_2 - p_1$$

$$\partial_1(\sigma_5^1) = p_3 - p_1$$

$$\partial_1(\sigma_6^1) = p_3 - p_2$$

∂_1 sınır homomorfizmasının matrisi;

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\partial_2(\sigma_1^2) = < p_1, p_2 > - < p_0, p_2 > + < p_0, p_1 >$$

$$\partial_2(\sigma_2^2) = < p_2, p_3 > - < p_1, p_3 > + < p_1, p_2 >$$

$$\partial_2(\sigma_3^2) = < p_2, p_3 > - < p_0, p_3 > + < p_0, p_2 >$$

$$\partial_2(\sigma_4^2) = < p_1, p_3 > - < p_0, p_3 > + < p_0, p_1 >$$

∂_2 sınır homomorfizmasının matrisi;

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} \approx \frac{Z^3}{Z^3} = \{0\}$$

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} \approx \frac{Z}{\{0\}} \approx Z$$

$$Z_2(K) = \{a < \sigma_1^2 > -a < \sigma_2^2 > +a < \sigma_3^2 > -a < \sigma_4^2 > | a \in Z\} \approx Z$$

$$H_i(K) = 0, \quad i \geq 3$$

Teorem 6.3.2. $f : X \rightarrow Y$ homeomorf ise $f_x : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ izomorftur.

İspat 6.3.2. Okuyucuya bırakılmıştır. □

Teorem 6.3.3. $\sigma = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$, n -simpleks ise, $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$ 'dır.

İspat 6.3.3. $\sigma = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$, n -simpleks olsun.

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = \partial_{n-1}(\partial_n \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle) \\ &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{j-1} \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n \rangle \right] \\ &= \sum_{j < i \leq n} (-1)^{i+j} \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle \\ &\quad + \sum_{i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n \rangle \\ &= \sum_{j \neq i} ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) \langle p_0, p_1, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle = 0. \quad \square \end{aligned}$$

6.4 Simplisiyal Kompleksin Euler Karakteristiği

(K, f) , S^2 kürenin bir üçgenleştirilmiş olsun. V , köşeler(0-simpleksler) sayısını, E kenarlar(1-simpleksler) sayısını ve F yüzeyler(2-simpleksler) sayısını gösterebilirsin. Bu durumda *Euler formülü*

$$V - E + F = 2$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bunu genelleştirelim;

Tanım 6.4.1. K , m -boyutlu simplisiyal kompleks olsun. $q \geq 0$ için α_q , K 'daki q -simplisiyal komplekslerin sayısı olsun. K simplisiyal kompleksinin *Euler karakteristiği*:

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.4.1. K , m -boyutlu oriyantal simplisiyal kompleks olsun.

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank}(H_q(K)).$$

İspat 6.4.1. Aşağıdak zincir kompleksini ele alalım;

$$0 \xrightarrow{\partial_{m+1}} C_m(K) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Her q için $C_q(K)$ rankı α_q olan serbest abel gruptur. $H_q(K) = \frac{Z_q(K)}{B_q(K)}$ olduğundan

$$\text{rank} H_q(K) = \text{rank} Z_q(K) - \text{rank} B_q(K)$$

$\text{Im} \partial_{m+1} = 0$ olduğundan $B_m(K) = 0$ dir. Her $q \geq 0$ için

$$0 \longrightarrow Z_q(K) \longrightarrow C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} B_{q-1}(K) \longrightarrow 0$$

tam dizisi vardır.

$$\alpha_q = \text{rank} C_q(K) = \text{rank} Z_q(K) + \text{rank} B_{q-1}(K)$$

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \alpha_q(K) = \sum_{q=0}^m (-1)^q (\text{rank} Z_q(K) + \text{rank} B_{q-1}(K)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} Z_q(K) + \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank} B_{q-1}(K) \end{aligned}$$

$B_{-1}(K) = 0 = B_m(K)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank } Z_q(K) + \sum_{q=0}^m (-1)^{q+1} \text{rank } B_q(K) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q (\text{rank } Z_q(K) - \text{rank } B_q(K)) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{rank } H_q(K). \quad \square\end{aligned}$$

Örnek 6.4.1.

$$H_i(S^2) = \begin{cases} Z, & i = 0, 2 \\ 0, & i \neq 0, 2 \end{cases} \quad H_i(D^2) = \begin{cases} Z, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

$$H_i(T) = \begin{cases} Z, & i = 0, 2 \\ Z \oplus Z, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1, 2 \end{cases} \quad H_i(S^1) = \begin{cases} Z, & i = 0, 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$H_i(Kb) = \begin{cases} Z, & i = 0 \\ Z \oplus Z_2, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases} \quad H_i(S^1 \times I) = \begin{cases} Z, & i = 0, 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$H_i(Mb) = \begin{cases} Z, & i = 0, 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases} \quad H_i(RP^2) = \begin{cases} Z, & i = 0 \\ Z_2, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

Yukarıdaki Teorem kullanarak Euler karakteristiğini hesaplayabiliriz;

$$\begin{aligned}\chi(S^2) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{rank } H_q(S^2) \\ &= (-1)^0 \text{rank } S^2(T) + (-1)^1 \text{rank } H_1(S^2) + (-1)^2 \text{rank } H_2(S^2) + \dots \\ &= 1 - 0 + 1 + 0 + 0 + \dots = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(T) &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \text{rank } H_q(T) \\ &= (-1)^0 \text{rank } H_0(T) + (-1)^1 \text{rank } H_1(T) + (-1)^2 \text{rank } H_2(T) + \dots \\ &= 1 + (-1) \cdot 2 + 1 = 0\end{aligned}$$

6.5 Homoloji ve Simplisiyal Dönüşümler

$\varphi : K \longrightarrow L$ simplisiyal dönüşüm olsun. $\varphi, \partial \circ \varphi_* = \varphi_* \circ \partial$ eşitliğini doğrulayan $\varphi : C_q(K) \longrightarrow C_q(L)$ lineer dönüşümü ürettiğini biliyoruz. $[c] = c + B_q(K)$, $H_q(K)$ bir elemanı gösterebilirsin. Dolayısıyla $c \in Z_q(K)$ dir yani $\partial(c) = 0$ ve böylece $\partial \circ \varphi_*(c) = \varphi_* \circ \partial(c) = 0$ olduğundan $\varphi_*(c) \in Z_q(L)$ dir.

$c - c' \in B_q(K)$ ise bir $u \in C_{q+1}(K)$ için $\varphi_*(c - c') = \varphi_*((u)) = \partial(\varphi_*(u))$ dir. Yani $\varphi_*(c) + B_q(L) = \varphi_*(c') + B_q(L)$. Dolayısıyla

$$H(\varphi) : H_q(K) \longrightarrow H_q(L) \quad c + B_q(K) \longmapsto H(\varphi)(c + B_q(K)) = \varphi_*(c) + B_q(L).$$

Tanım 6.5.1. $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ iki simplisiyal dönüşüm olsun. Her q için

$$\partial_{q+1} \circ h + h \circ \partial_q = \varphi_* - \psi_*$$

eşitliğini doğrulayan $h : C_q(K) \longrightarrow C_{q+1}(L)$ lineer dönüşümü varsa φ ve ψ dönüşümleri **zincir homotopiktir** denir.

Teorem 6.5.1. φ ve ψ arasında bir zincir homotopi varsa

$$H(\varphi) = H(\psi).$$

İspat 6.5.1. $[c] = c + B_q(K) \in H_q(K)$ olsun.

$$\partial_{q+1} \circ h(c) + h \circ \partial_q(c) = \varphi_*(c) - \psi_*(c).$$

$\partial_q(c) = 0$ olduğundan $\varphi_*(c) - \psi_*(c) = \partial \circ h(c) \in B_q(L)$. Yani $\varphi_*(c) + B_q(L) = \psi_*(c) + B_q(L)$ ve $H(\varphi)([c]) = H(\psi)([c])$. $\square$

Tanım 6.5.2. $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ iki simplisiyal dönüşüm olsun. Herhangi bir $\sigma \in K$ simpleksi için, $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma) \subset L$ de bir simpleks oluyorsa φ, ψ dönüşümleri **kontigü** dur denir

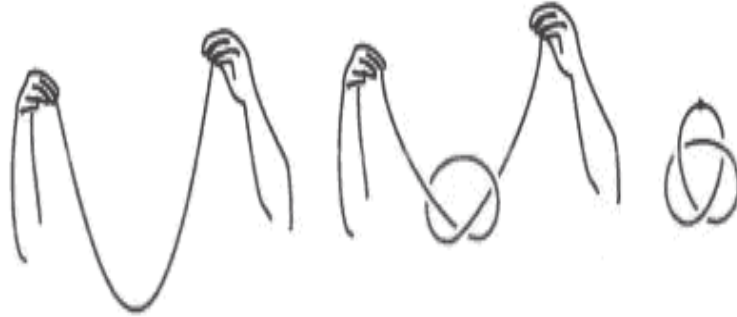
Sonuç 6.5.1. $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$ iki simplisiyal dönüşüm ve φ, ψ ye kontigü ise tüm q için $H_q(\varphi) = H_q(\psi)$ dir.

İspat 6.5.2. Okuyucuya bırakılmıştır. $\square$

Bölüm 7

DÜĞÜM TEORİSİ

Elimize küp şeklinde bir kutu alalım ve kutunun etrafına beş metre uzunluğunda bir ipi hediye paketlermişiz gibi bağlayıp uçlarını yapıştıralım. Daha sonra bu ipi yavaşça kutunun etrafından çıkaralım. Elde ettiğimiz şekil bir trefoil (yonca yaprağı) olacaktır. Aynı işlemi beş metre değil de yirmi metre uzunluğunda ve daha kalın bir iple yapsaydık yine bir trefoil elde etmiş olacaktık.



Yani düğüm teorisinin topolojinin bir alt dalı olarak incelenmesinin sebebi de budur.

Düğüm teorisinin tarihinin başlangıcı tam olarak bilinmesede ilk olarak Gauss'un ilgilendiği düşünülmektedir ancak bu konuyla ciddi manada ilk olarak ilgilenen Amerikalı ünlü matematikçi Alexander olmuştur. Alexander düğüm teorisinin 3-boyutlu topolojide ne kadar önemli olduğunu göstermiştir. Daha sonra Alman matematikçi Seifert 1920 de çalıştığı bu konunun önemini pek çok kişinin anlamasını sağlamıştır. Ayrıca cebirsel geometri ile düğüm teorisinin ilişkisi bu dönemde Almanya'da yapılan çalışmalarda ortaya konulmuştur.

Asıl büyük ilerlemeler ikinci dünya savaşı sırasında Amerika'da yapılan araştırmalarla sağlanmıştır. Amerika'daki bu gelişmelerin etkisi zamanla Japonya'ya da sıçramış ve burada da düğüm teorisi ile ilgili büyük atılımlar gerçekleştirilmiştir. 1970 de ise periyodik dönüşümlerle alakalı Smith tahmininin çözümünden dolayı düğüm teorisinin cebirsel sayı teorisi ile bağlantısının olabileceği farkedildi.

1980 lere gelindiğinde ise Jones'un epochal düğümlerini keşfi ile düğüm teorisi topoloji başlığı altından çıkıp matematiksel fiziğe taşınmıştır. düğüm teorisi devamlı olarak geliştiği içinde pekçok bilimdalı ile olan ilişkisi zamanla ortaya çıkacaktır. Matematiksel biyoloji, mekanik ve kimyanın da pekçok alanındaki işlevselliği zamanla ortaya konulmuştur.

Günümüzde ise düğüm grafi düğüm teorisinin uygulamalarında oldukça önemli bir yer tutar. Özellikle düğüm teorisinin kimyaya uygulamalarında düğüm grafları önemli bir araçtır. Spatial (uzaysal) graflar olarak adlandırılan ve düzlemsel graflardan biraz farklı olan bu graf kavramı bu alanda önemli bir araçtır. Bu yüzyılın başından beri ise bu alanda çalışan bazı kimyacılar düğüm veya halkaları içeren yapı formülü ile suni molekül sentezlemeye ilgi göstermişlerdir. Frisch ve Wassermann (1961) bir halkayı (Hopf Halkası) ihtiva eden yapı formülü ile bir molekülü sentezlemeyi başardılar (Murasugi 1996). Bir düğümün yapısal formülü ile bir molekülü sentezleme işlemi bazı kimyacılar tarafından sürdürülmüştür ve moleküller bu ilginç yapı formülü ile sentezlenmiştir. Walba (1985) molekülün yapısal formülünü elde etmek için kullanılan işlemde, yapısal formül olarak bir düğümün yapısını kullanır, Möbiüs merdivenli (M_3 -graf) bir molekül sentezlemeyi başarır (Murasugi 1996). Bu olay molekül topolojisinin doğmasına yol açmıştır.

Bir molekülün yapısal formülü, moleküldeki atomlara karşılık gelen ve kenarları, köşeler, kovalent bağlar yardımıyla atomlar arasındaki veri kombinasyonunu ifade eden bir graf olarak tanımlanabilir.

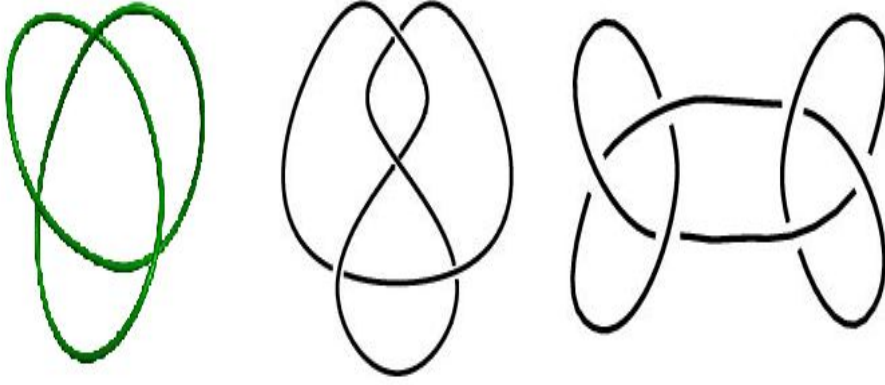
7.1 Düğümler, Zincirler, Diyağramlar

Düğümü formel olarak tanımlarken smooth(düzgün) düğüm ve poligonal düğüm olarak ikiye ayırabiliriz.

Tanım 7.1.1. (Düğüm ve Zincir)

1. Birim çembere homeomorf olan 3 boyutlu uzayın alt kümesine düğüm denir.
2. Birçok ayrık (kesişmeyen) düğümlerin birleşimine zincir denir.

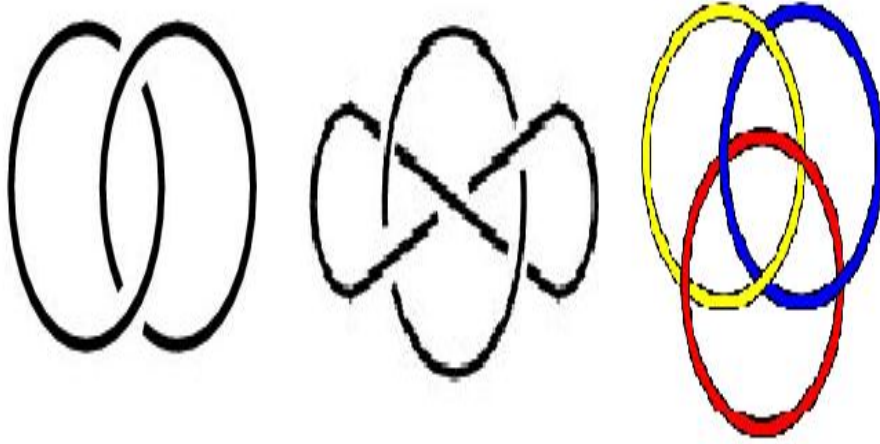
3. İki zincir 3 boyutlu uzayda izotopik ise bu iki zincir denktir denir.



Şekil 7.1: trefoil düğümü- sekiz düğümü -kare düğümü

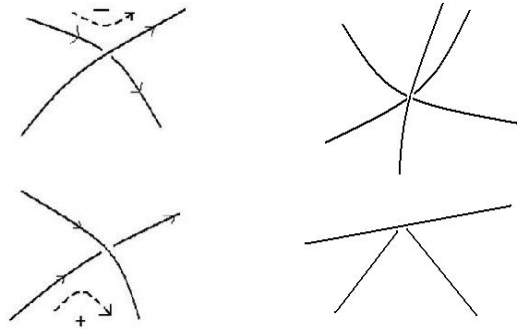
Tanım 7.1.2. Birim çembere denk olan düğüme düğümsüz denir.

2. Bir zincir $\{(x, y, i) | x^2 + y^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ kümesine denk ise bu zincire n-bileşenli zincir olmayan denir.



Şekil 7.2: hoph zinciri- whitehead zinciri - borromean zinciri

İki düğüm ya da iki zincir düzlemde aynı diyagrama sahip iseler bunlar denktir.



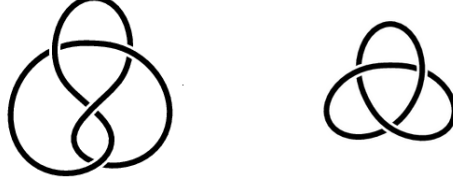
Şekil 7.3: uygun çaprazlama-kötü çaprazlama

Tanım 7.1.3. R^3 de kendini kesmeyen poligonal doğrulara poligonal düğüm denir.

Tanım 7.1.4. Diferansiyeli sıfıra eşit olmayan sonsuz bir diferansiyellenebilir gömülme altında, $\mathbb{R}^3$ deki çemberin görüntüsü olarak tanımlanan düğümlere ise smooth

düğüm denir.

Biz genel olarak düğümün smooth tanımını kullanacağız.



Şekil 7.4: 4_1 ve 3_1

Tanım 7.1.5. Ki ler düğüm ve $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ iken $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n \subset \mathbb{R}^3$ olacak şekildeki L alt uzayına zincir denir.

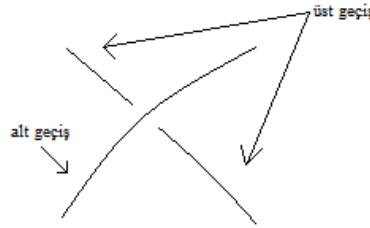
Tanım 7.1.6. n bileşenli bir L zincirinin bileşen sayısını $\text{comp}(L)=n$ ile gösterilir.

$\text{comp}(L)=1$ olan bir zincir ise bir düğüme karşılık gelir.

Tanım 7.1.7. Zincirler diyagramları yardımıyla incelenir. $\mathbb{R}^3$ deki zincirlerin regüler diyagramını elde etmek için

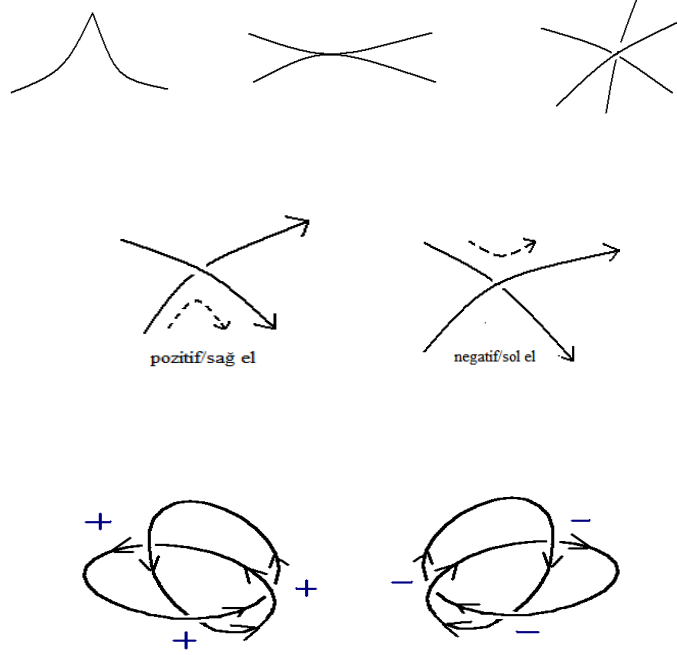
$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ deki görüntü resmi alınır. işte bu diyagramların şu şekilde ifade edilir.

$\mathbb{R}^2$ deki bir diyagram yayların ve çaprazlamaların sayısı tarafından gösterilir. Bir çaprazlamada bir yay yukarıdan geçerken diğer iki yay aşağıdan geçer.

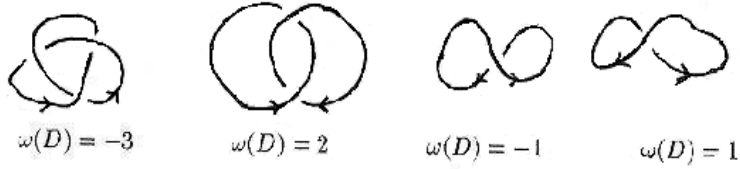


Bir diyagramda aşağıdaki çaprazlama hareketlerinin yapılmasına izin verilmez.

Tanım 7.1.8. Yönlü bir zincir herbir bileşen boyunca bir yön seçerek zincire karşılık gelen diyagramda oklarla göstererek elde edilir. Böylelikle iki çeşit çaprazlama elde etmiş oluruz:



Tanım 7.1.9. Yönlü bir diyagramın kıvrımı şu şekilde bulunur:
 $\omega(D) = \sum_{\text{çaprazlamalar}} \text{çaprazlama işaretleri}$



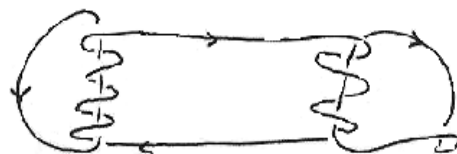
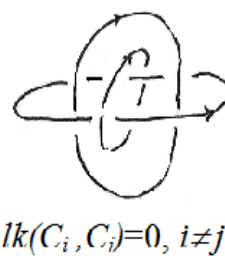
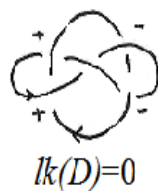
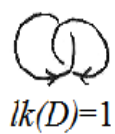
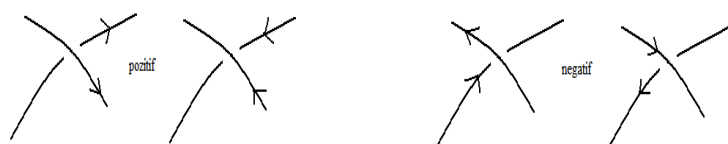
Tüm yönleri değiştirmek kıvrımı değiştirmez yani yönlü olmayan bir düğüm diyagramının kıvrımı iyi tanımlıdır.

Tanım 7.1.10. Yönlü bir D diyagramının bileşenlerinin $C_1, C_2, \dots, C_n$ olduğunu varsayalım.
 $i \neq j$ olmak koşulu ile C_i ile C_j nin zincirlenme sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$lk(C_i, C_j) = \frac{1}{2} \sum_{C_i \text{ ile } C_j \text{ nincaprazlamaları}} \text{çaprazlama işaretleri}$$

D nin zincirlenme sayısı ise:

$$lk(D) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} lk(C_i, C_j)$$



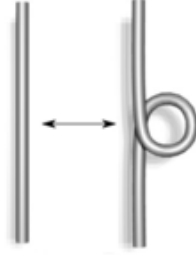
$$lk(C_1, C_2)=\frac{1}{2}8=4 \quad lk(D)=7 \quad lk(C_2, C_3)=\frac{1}{2}6=3 \quad w(D)=15$$

7.2 Reidemeister Hareketleri

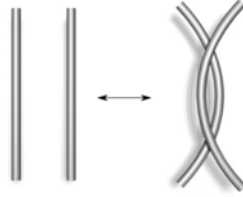
Tanım 7.2.1. Reidemeister hareketi bir düğüm diyagramı üzerinde herhangi bir değişikliğe sebep olmadan yapılan hareketlerdir.

R_0 : Diyagramın homotopisi yay ve çaprazlamaların inşasını değiştirir yani örneğin yayları büzer ya da açar fakat yönünü değiştirmez:

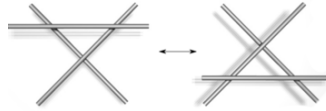
Diyagramın etkilenen kısımları yalnızca aşağıdaki hareketlerle meydana gelir
 R_1 :



R_2 :



R_3 :



Bir düğümü isimlendirirken iki sayıya ihtiyaç duyacağız. Bunlar düğümün çaprazlanma sayısı ve bir düğümün çözülmesi için yapılması gereken hareketlerin sayısıdır.

Yani 3_1 trefoil düğümü için 3 düğümün çaprazlanma sayıları, 1 ise düğümün çözülmesi için yapılması için gereken işaret değişimi hareketidir.

Tanım 7.2.2. D ve D' diyagramları izotopiktir. $\iff D$ diyagramı R_i , $0 \leq i \leq 3$ hareketlerinin yardımıyla D' diyagramından elde edilebilir. Eğer D ve D' R_1 hareketi kullanılmaksızın birbirine izotopik kılınıbiliyorsa D ve D' ye regüler izotopik denir.

Teorem 7.2.1. (*Reidemeister(1932)*)

1. Herhangi bir L zinciri diyagramı olan bir zincire izotopiktir.
2. Verilen L_0, L_1 zincirlerinin diyagramları sırasıyla D_0 ve D_1 olsun. L_0 ve L_1 zincirleri izotopiktir ancak ve ancak D_0 ve D_1 diyagramları izotopiktir.

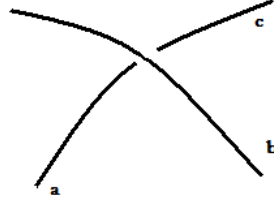
Hopf zinciri Whitehead zincirine izotopik değildir.

7.3 Düğüm Renklendirme

Tanım 7.3.1. Bir L zincirinin D diyagramı aşağıda gösterildiği gibi tamsayılarla gösterilebiliyorsa, L zincirine mod n e göre renklendirilebilir denir.

$$a + c = 2b \pmod{n}$$

yani üst geçiş = alt geçişlerin ortalaması

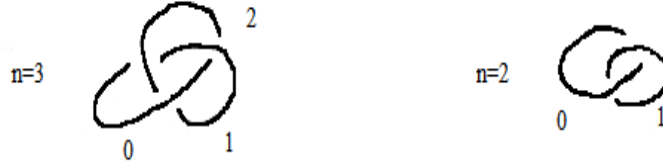


mod n e göre düz bir renklendirme yapmamalıyız. Yani mod n e göre bütün yaylar aynı renkte olmamalı.

Yani düğüm renklendirme sırasında özellikle aşağıdaki iki kurala dikkat etmeliyiz:

1. En azından iki renk kullanılmalıdır.
2. Herbir kesişimde ya üç farklı renk ya da tümü aynı renk olacak şekilde renklendirme yapılmalıdır.

Teorem 7.3.1. Eğer bir L zinciri mod n de renklendirilebiliyorsa, L nin bütün diyagramları da mod n de renklendirilebilir.



1 bileşenden daha fazla bileşene sahip herhangi bir zincir mod2 de renklendirilebilir. Bundan hareketle hiçbir düğüm mod2 de renklendirilemez.

Tanım 7.3.2. Bir zincir ya da diyagram $x_1 < 0$ bölgesinde ve $x_1 > 0$ bölgesinde olacak şekilde iki parçadan meydana geliyorsa bu zincir ya da diyagrama *ayrılabilir* denir.

Eğer bir zincir ayrılabilirse o zaman bu zincir herhangi bir $n \neq 1$ için modn de renklendirilebilir. Borromean halkaları ayrılabilir değildir.

Lemma 7.3.1. Herhangi bir diyagram santranc tahtası şeklinde gösterilebilir.



Tanım 7.3.3. Bir diyagramın alt geçiş ve üst geçiş bilgilerini gözardı ederek çizilen zincir diyagramına *gölge* denir.

S deki bileşenleri bağlandığı yerdeki tümleyenlerine yani S_n nin ayırdığı kısımlara *bölge* denir.

Eğer her çaprazlamada dört farklı bölge varsa diyagrama *indirgenmiş diyagram* denir.

Teorem 7.3.2. (*Schönflies*) R^2 deki herhangi bir C kapalı eğrisi için $h : R^2 \rightarrow R^2$ ve $h(C) = S^1$ şeklinde bir homeomorfizm vardır.

Lemma 7.3.2. Bölgeler yol bağlantılıdır.

L bir zincir olsun. L nin bir indirgenmiş diyagramı vardır.

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Burada A_+ matrisinin satırları yay numaralarına sütunları ise çaprazlamalara karşılık gelir.

Lemma 7.4.1. A_+ bir kare matristir.

İspat

Diyagramda bir yön seçtiğimizde her yay bir çaprazlamada sona erdiğinden dolayı yay sayısı çaprazlama sayısına eşittir, buradan da yaylar ile çaprazlamalar arasında bir bijeksiyon oluşturulabilir. Biz daha önceki önermelerimizden verilen herhangi bir denkleğin diğerlerinin işaretli toplamı olduğunu biliyoruz. (yani b leri istediğimiz gibi seçmekte özgürüz.) Ve başka bir teoremden de verilen herhangi bir x_1 in sıfır olabileceğini biliyoruz. Böylece A_+ nın i . satır ve j . sütununu yok ederek A matrisini elde ederiz ve

$Ax = nb$ yi çözeriz ki burada hangi satır ve sütunun yok edildiği önemli değildir, ayrıca b_+ nın da i . elemanını yok ederek b yi elde ederiz. x_0 yerine 0 koyalım ve A_+ da 0. satır ve sütunu yok edelim.

Durum1

$$\det(A) = 0$$

Varsayalım ki; $n = 0$ olsun, o zaman Q da aşık olmaya bir çözüm olduğundan

$x_i = p_i/q_i \in Q$ $1 \leq i \leq m$ için deriz.

$q = q_1 \cdot \dots \cdot q_m$ olduğu yerde

$y_0 = 0$, $y_1 = x_1q$, $y_2 = x_2q$, $\dots$, $y_m = x_mq$ alarak $(y_0, y_1, \dots, y_m)$ renklendirmesini yapalım.

Böylece 0 bir renklendirme sayıdır ve buradan herhangi bir $n \neq 1$ değeri bir renklendirme sayısıdır.

Durum2

$$\det(A) \neq 0$$

Cramer kuralı Q da bize bir tek çözüm verir:

$$1 \leq k \leq m \text{ için}$$

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & nb_1 & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & nb_m & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}{\det A}$$

$n = |\det A|$ olarak alırsak bir çözüm elde ederiz:

$$x_0 = 0$$

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & nb_1 & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & nb_m & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$1 \leq k \leq m$$

$$Ax = \begin{cases} nb & \det A > 0 \\ n(-b) & \det A < 0 \end{cases}$$

$(b_1, \dots, b_m) = (1, 0, \dots, 0)$ olarak alalım. Böylece

$X_0 = 0$, $x_k = (-1)^{k+1}$ $1 \leq k \leq m$ için, ve

$\det A = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m$ ve dikkat etmeliyiz ki; $\det(A) \neq 0$ olduğundan $x_i \neq 0$ ve sabit olmayan bir çözüm elde ederiz ki bu modn de sabit değildir yani n tarafından bölünemeyen x_i lerden oluşur.

Tanım 7.4.1. Bir L zincirinin determinanı $\det(L) = |\det(A)|$ dır.

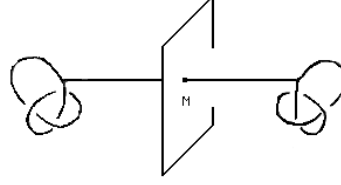
Teorem 7.4.1. Herhangi bir $n \neq 1$ sayısı bir L zinciri için bir renklendirme sayısıdır ancak ve ancak n ve $\det L$ bir ortak çarpana sahiptir.

Ve sonuç olarak şunları da söyleyebiliriz

1. Eğer $\det L = 1$ ise L nin renklendirme sayısı yoktur.
2. Eğer diyagram bağlantılı değil ise $\det(L) = 0$.

7.5 Aynalar VE Düğüm Kodlaması

L bir zincir ve $M \subset R_3$ bir afin düzlemi olsun. L nin *ayna görüntüsü*, $m(L)$, M deki yansımasından elde edilir.



Ayna işlemi izotopi sınıfları üzerinde etkilidir ve aynanın seçimine bağlı değildir.

mL nin diyagramı L nin diyagramındaki tüm çaprazlamalar değiştirilerek bulunur.

Tanım 7.5.1. Eğer bir zincir aynadaki yansımasına denk ise *achiral* dir denir. Aksi halde ise *chiral* olarak adlandırılır.

Düğüm tablosundaki achiraller $4_1, 6_3, 8_3, 8_9, 8_{12}, 8_{17}, 8_{18}$ dir. 3_1 ise chiraldır.

Tanım 7.5.2. K yönlü bir düğüm olsun ve $r(K)$ da K nın belirlenmiş yönünü göstere. Eğer K ve $r(K)$ izotopik ise K tersinirdir.

Tabloda tersinir olmayan tek düğüm 8_{17} dir.

7.5.1 Düğüm Kodlaması

Bir gölgenin bir zincire ait çaprazlama bilgileri ele alınmadan çizilen diyagramı olduğunu hatırlıyoruz. Tek bileşenli bir gölge, yönsüz değişen(alternating) bir tek düğüm belirtir.

ispat

Gölge etrafında çaprazlama bilgilerine uyarak aşağı, yukarı, aşağı, ... şeklinde yürüelim. Bunu işe yaradığını görebilmek için bir satranç tahtası seçelim ve yürümeye başlarken siyah kısmını solumuza alalım siyah-beyaz şeklinde yürümeye devam ettikçe yukarı, aşağı yürüdüğümüzü göreceğiz. Tablonun sadece son üç elemanı değişmeyendir (not alternating). Bunlar; $8_{19}, 8_{20}, 8_{21}$ dir. Bir gölge verilsin ve bunun etrafında ardışık olarak çaprazlama numaralarını yürüelim. Şimdi şöyle bir fonksiyon elde ederiz;

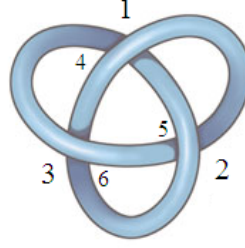
f değişmeli ise; $f : \text{teksayılar} \rightarrow \text{ciftsayılar}$

burada tek sayılar alt kesişimlere, çift sayılar ise üst kesişimlere karşılık gelir.

$f(1), f(2), f(3), \dots$ dizisi bize gölgeyi verir.

Örneğin; 3_1 düğümü $4, 6, 2$ dizisi tarafından belirlenir.

Aynı dizinin farklı gölgeleri farklı diziler verir.



7.6 Alexander Polinomu

Z deki *modn* renklendirmesini daha önce gördük. Şimdi bunu Z yerine $Z[t, t_{-1}]$ halkasını alarak (t tek değişken, negatif üz alabiliyoruz) genellelim ve polinomlar yardımıyla yönlendirilen zincirler bir polinom modunda renklendirilebilsin.

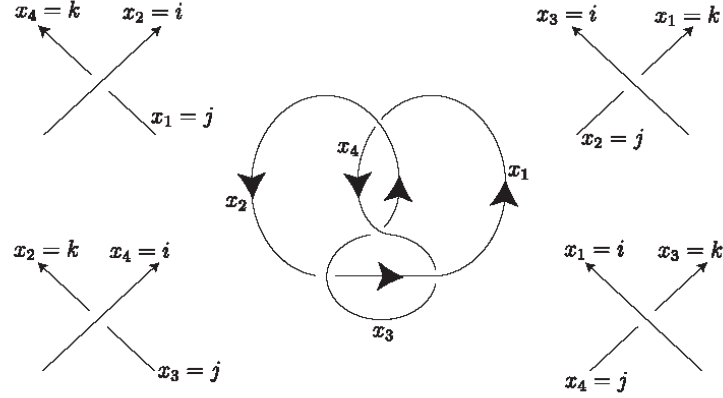
Bu durumda çaprazlama bağıntısı

$c - te = b - tb$ veya $c = ta + (1 - t)b$ olur. Dikkat edelim ki $t = -1$ koyarsak eski çaprazlama bağıntımızı elde ederiz. $\Delta_L(t)$ determinantına göre $Z[t, t_{-1}]$ de bir renklendirme elde ederiz ve $\Delta_L(t)$ polinomu L nin *Alexander Polinomudur*. Bir K düğümünün Alexander polinomunu $\Delta_L(t)$ çizerken

1. Düğümümüze istediğimiz şekilde bir yön veririz.
2. yayları ve çaprazlamaları ayrı ayrı numaralandırırız.
3. n =çaprazlama sayısı olmak üzere aşağıdaki koşullar ışığında $(n \times n)$ lik bir matris tanımlarız:
 - (a) Eğer diyagramımızın x çaprazlaması pozitif yönlü ve yay isimleride i, j, k olmak üzere x satırının i sütununa $1 - t$ yi girelim ve bu satırın j sütununa -1 i ve bu satırın k sütununa t yi girelim
 - (b) Eğer diyagramımızın x çaprazlaması negatif yönlü ise x satırının i sütununa $1 - t$ yi girelim j sütununa t değerini ve k sütununa da t değerini girelim geri kalan bileşenler yerinede 0 değerlerini girelim.

Bu satır ya da sütunlardan herhangi birini yok ederek $(n - 1) \times (n - 1)$ lik bir matris elde ederiz. İşte bu matrisin determinantı bize K düğümünün Akexander Polinomunu verir.

Aşağıdaki örneğimizi inceleyelim:



$$\begin{bmatrix} -1 & 1-t & 0 & t \\ 0 & t & -1 & 1-t \\ t & -1 & 1-t & 0 \\ 1-t & 0 & -1 & t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1-t & 0 \\ -0 & t & -1 \\ t & -1 & 1-t \end{vmatrix} \Rightarrow 1-2t+2(t^2)|\Delta_K(-1)| = 5$$

Alexander polinomu ile ilgili aşağıdaki özellikleri verebiliriz:

1. $|\Delta_L(-1)| = \det(L)$
2. $\Delta_{rL}(tL^{-1}) = \Delta_L(t) = \Delta_{mL}(t^{-1})$
3. Eğer n sayısı $|\Delta_L(-1)|$ ı bölüyorsa düğüm n renklendirilebilirdir.

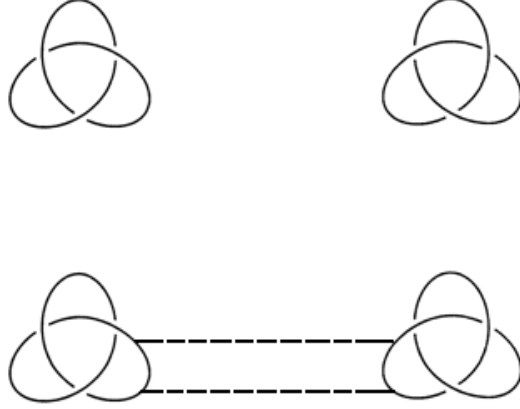
Eğer L ayrılabilir ise $\Delta_L(t) = 0$

7.7 Düğüm Toplamları

K_1 ve K_2 gibi iki düğümün bağlantılı toplamı her iki düğümden birer küçük daire dilimi çıkarılıp meydana gelen dört bitim noktası birbirini kesmeyen iki yeni eğri parçası ile birleştirilerek elde edilir, sonuç olarak $K = K_1 \sharp K_2$ şeklinde bir çift düğümdür.

Tanım 7.7.1. Eğer aşık olmaya L ve M düğümleri için K , $L \sharp M$ izomorf değil ise K ya *asal düğüm* denir. Düğüm tablosu yalnızca asal düğümleri gösterir.

Tanım 7.7.2. Bir D düğümünün diyagramında üst geçişlere *köprü* bunların sayısınınada *köprü sayısını* verir.



Tanım 7.7.3. Bir K düğümünün köprü sayısı $b(K)$ K ya ait diyagramlarda elde edilen köprü sayılarının minimumuna eşittir.

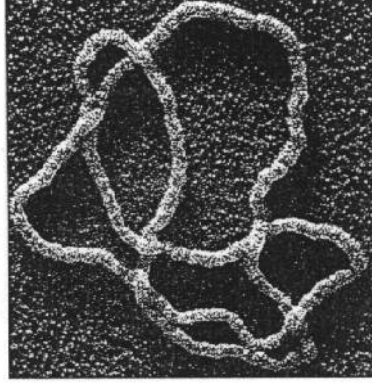
Eğer K bir unknot ise $b(K) = 1$ olur.

$8_5, 8_{10}, 8_{15}$ hariç olmak üzere düğüm tablosundaki tüm düğümler 2-köprülü düğümlerdir. Bu hariç olan düğümler 3-köprülü düğümlerdir. Ancak 3-köprülü düğümler tam olarak sınıflandırılamamıştır.

7.8 DNA'ya Kısa Bakış

Son yıllarda moleküler biyolojide pekçok gelişmeler meydana gelmiştir. Bu gelişmelerin bir kısmında matematiğin moleküler biyolojiye uygulanması ile gerçekleşmiştir. Özellikle düğüm teorisi DNA rekombinasyonu için oldukça güzel bir yol verir. DNA ile matematiğin ilişkisi 1950 lerde dublex DNA'nın sarmal Crick-Watson yapısının keşfi ile başlamıştır. Bir matematik modeli olan Özel-Bölgeli Rekombinasyon Tangel Modeli ilk olarak De Witt Sumners tarafından tanıtılmıştır.

Bu kısımda ise asıl amacımız düğüm teorisinin DNA rekombinasyonuna uygulanmasının detaylarını vermek olacaktır. DNA'nın hücre çekirdeği içerisinde bulunan çok uzun ve ince moleküller olduğunu biliyoruz. Bu moleküller canlının hayati özelliklerini taşıyan ve biyolojik bilginin nesilden nesile aktarılmasını sağlayan DNA molekülü bulunur. İnsan DNA'sı 3.2 milyar yapı taşından oluşan bir bilgi hazinesi, bir kitaptır. Bu kitaptaki harfleri yan yana dizecek olursak, biner sayfalık 10.000 kitaptaki bilgiye denk gelir.



Bir insanın trilyonlara yakın hücrelerinin hepsinin çekirdiğinde bulunan DNA çok sıkı bir şekilde kendi etrafında dolanmıştır ve bu şekliyle bir yumağı andırır . DNA molekülü yumak halinden çıkarılıp bir ipliğe dönüştürüldüğünde, bu DNA nın uzunluğu binbeşyüz cm ye yakındır. Bu 1.5 metrelik şerit 10^{-6} metre çekirdek içinde bulunur. Bu da DNA nın neden çekirdek içinde karmaşık ve düğümlenmiş bir şekilde bulunduğunu bize açıklamaktadır.

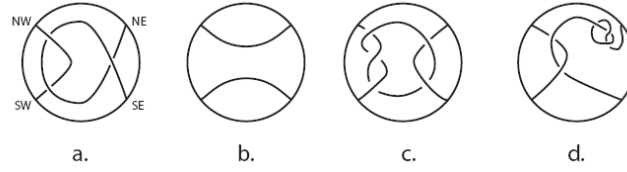
DNA'yı gözümüzde canlandırırsak çok uzun iki şeridin milyonlarca kez birbirine geçmiş, düğümlenmiş ve ardarda pekçok kez sarmalanmış bir halde olduğunu düşünebiliriz. Ancak replikasyon ve translasyon işlemlerinin uygulanması eğer DNA düğümlenmiş ve karmaşık olmasındansa, düzenli bir şekilde sıralanmış ise daha kolaydır. Enzimler ise düğümleri ince şeritler şeklinde böler ve bunları daha düzgün bir hale gelecek şekilde şeritleri tekrar bağlar.

Topolojik ilkeleri kullanarak DNA nın düğüm çözme işlemini daha iyi anlayabiliriz. Çünkü DNA replikasyon ve translasyon işlemlerini gerçekleştirebilmek için hızlıca kendi düğümlü yapısını çözmelidir. Ve bu aslında topolojik bir problemdir. Düğüm teorisi araştırmacılara DNA paketlemesi ile ilgili olarak nitel bir tahminden çok nicel bir değer verir ve düğüm teorisi sayesinde bilimadamları DNA nın bu düğüm çözülme işlemleri sırasında hangi enzimlerin kullanıldığını anlamasını sağlar. İşte bu noktada DNA nın ifadesinde oldukça önemli olan tangle kavramı devreye girecektir.

7.9 Tangle

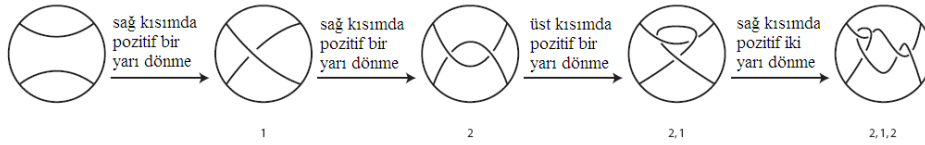
B bir 3 küre, t ise B içine gömülmüş yönsüz yay çifti olsun. Bu yay çiftlerinin dört bitim noktası ise kürenin ekvator noktalarındadır (KB, KD, GB, GD). Bir tangle, (B, t) çiftidir. Bir *tangle diyagramı* ise tangle ın ekvator

düzlemine yansıtılması ile elde edilir. Diyagram üzerindeki bitim noktalarını KB, KD, GB, GD olarak işaretleyeceğiz. *Rasyonel tangle* ise bitim noktalarının kaydırılması ile aşikar tangle a dönüştürülebilen tangle lardır. Rasyonel tangle lar DNA ların yapısı ile benzerlik gösterir ve bu sebeple bizim asıl odak noktamız olacaktır. VE bu yolla dönüştürülemeyen tangle lar da vardır bunlarda *asal tangle* ve *yerel düğümlenmiş tangle* yapılarıdır.



Şekil 7.5: Tangle Örnekleri a.Rasyonel b.Aşikar c.Asal d.Yerel Düğümlenmiş

Her rasyonel tangle $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i$ vektörü tarafından oluşturulur. Ve biz bu vektör yardımıyla tangle diyagramını çizebiliriz: İlk olarak KB, KD, GB, GD noktaları işaretlenmiş bir çember ile başlayalım ve yayları şekilde görüldüğü gibi çizelim. Eğer n çift ise alt kısımdan başlarız (GB ve GD) ve a_1 sayısı kadar yarım kaydırma yaparız (eğer a_1 pozitif ise sağ-el kaydırması, a_1 negatif ise sol-el kaydırması yaparız.). Daha sonra diyagramın KB-KD kısmında $a - 2$ kadar yarım kaydırma yaparız. Daha sonra tekrar alt kısma dönüp aynı işlemleri yapmaya devam ederiz. Eğer n tek sayı ise sağ taraftan başlar ve işlemi daha önceki gibi uygulamaya devam ederiz. Örneğin $(2, 1, 2)$ rasyonel tangle diyagramını aşağıdaki gibi çizeriz.



Her tamsayı vektör $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel sayısına eşit olan sürekli bir kesir şeklinde ifade edilebilir. Eğer T tangle ı $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektörleri tarafından ifade ediliyorsa sürekli kesir

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots + \frac{1}{a_1}}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

şeklinde bulunur. $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel sayısı T tangle ının kesri olarak adlandırılır.

Teorem 7.9.1. İki tangle izotopiktir ancak ve ancak aynı kesirlere sahiplerse.

Eğer iki tangleden biri eğer bitim noktaları hareket edilmeksizin herhangi bir şerit koparılmadan ya da bir şerit diğerinin üzerinden geçmeden diğerine dönüştürülebiliyorsa bunlar denk olur. Ve bu teorem sayesinde aslında tangle kesrinin tangleın özelliklerini belirlemede ne kadar önemli olduğunu anlayabiliyoruz.

Yukarıda bir vektörden tangle kesrinin nasıl elde edildiğini görmüştük benzer şekilde tangle kesri sayesinde vektörü de elde edebiliriz:

$$\frac{\beta}{\alpha} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots + \frac{1}{a_1}}}$$

Tabiki bu yolla farklı vektörlerde elde edebiliriz. Örneğin; $(3, -2, 2)$ ve $(2, 2, 1)$ vektörlerinin her ikisi de $\frac{7}{5}$ kesrini verir. Fakat burada iki vektörde aynı tangle'ı belirtir. Ayrıca tüm rasyonel tangle Conway sembolü olarak adlandırılan bir tek kanonik vektör tarafından ifade edilebilir. Bir $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektörü kanonik formda ise her $1 \leq i \leq n-1$ için $|a_i| > 1, a_i \neq 0$ ve tüm sıfırdan farklı ifadeler aynı işarete sahiptir. Yukarıdaki örneğimizin Conway sembolü $(2, 2, 1)$ dir.

Teorem 7.9.2. $\frac{\beta}{\alpha} \in Q \cup \frac{1}{0} = \infty$ ($\alpha \in N \cup 0, \beta \in Z$ ve $obeb(\alpha, \beta) = 1$) kesri ile rasyonel tangle'lar kümesi arasında 1-1 eşleme vardır. Tangle kesirleri ve vektör notasyonlarına ek olarak tangle'lar matris olarak da ifade edilebilirler. Bu tangle'lar 2×2 lik matrisler cinsinden ifade edilir, şöyle ki:

$$\begin{bmatrix} u & v' \\ v & u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{2k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{2k-1} & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{23}{17} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = (5, 1, 2, 1)$ nin matris olarak ifadesi aşağıdaki şekildedir

$$\begin{bmatrix} u & v' \\ v & u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 4 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

7.10 Tangle İşlemleri

Tanım 7.10.1. A ve B tangle'ları verilsin bu iki tangle'ın toplamı $A + B$ bir tangle'ın KD ve GD bitim noktalarının diğer tangle'ın KB ve GB bitim noktalarına sırasıyla eklenmesi ile elde edilir.

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{A} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{B} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{A} \quad \text{B} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

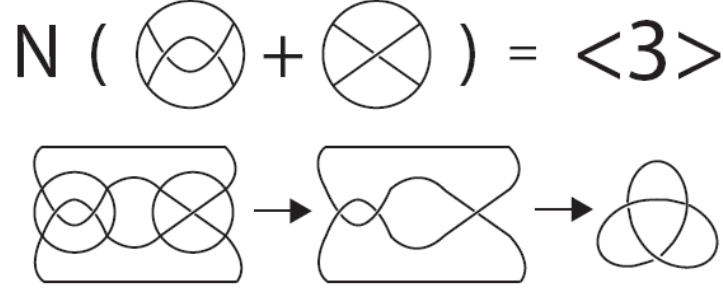
$$\mathbf{N} \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{A} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{---} \end{array}$$

Tanım 7.10.2. Bir T tangle'ının pay kapanması olarak bilinen, $N(T)$, işlemi KB ve KD bitim noktalarının birleştirilmesi ve GB ve GD bitim noktalarının birleştirilmesi ile elde edilir.

Tanım 7.10.3. Bir T tangle'ının payda kapanması olarak bilinen, $D(T)$, işlemi KB ve GB bitim noktaları birleştirilmesi ve KD ve GD bitim noktalarının birleştirilmesi sonucu elde edilir.

Tangle işlemleri birlikte de kullanılabilir. $N((2, 0) + (1)) = \langle 3 \rangle$ işlemi sonucu elde edilen düğüm trefoil yani 3_1 dir. Buradaki $(2, 0)$ ise Hopf zinciridir.

Yani bu $N(A + B) = K$ işlemi sonucunda elde edilen K bir düğümdür. Ayrıca iki rasyonel tangle'ın toplamı her zaman bir rasyonel tangle vermektedir.

$$N \left(\text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} \right) = \langle 3 \rangle$$


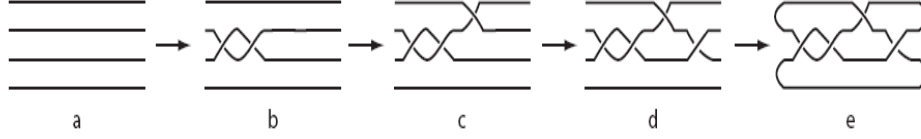
yebilir. İşte tam bu noktada işlemi nasıl yürüyeceğini düşünebiliriz; fakat iki rasyonel tangle'ın toplamının pay kapanması 4-plat isimli bir düğüm verir ve bu DNA modellemesinde oldukça önemli bir konudur.

7.11 4-Plat

Bir 4-plat dört şeridin örülmesi ve bitim noktalarının aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bağlanması ile elde edilen düğümdür. 4-plat ler genelde 2-köprülü yasa rasyonel düğümler olarak bilinir. Sekizden daha az çaprazlaması olan tüm asal düğümler ve yediden daha az çaprazlamalı iki bileşenli asal zincirler 4-plattır. 4-plat düğümler tıpkı rasyonel tangle'lar gibi tamsayı vektörlerle ifade edilebilir. 4-plat vektörü tek sayıda bileşeni olan vektörlerdir şöyle ki; $\langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle$ her i için $c_i \geq 1$ dir ve buradaki her tamsayı bileşeni şeritler bir yarım kaydırmayı temsil eder. Yani rasyonel tangle'lara olduğu gibi vektörler 4-plat diyagramı çizmek için de kullanılabilir. Bunu yaparken şu yolu izleriz: dört şeritle başlarız ardından ortadaki lifde c_1 kadar yarım kaydırma yaparız ardından en üstteki iki lifde c_2 kadar yarım kaydırma yaparız daha sonra da yine ortadaki iki şerite aynı işlemi uyguluyoruz ve bu işleme vektördeki tüm tamsayı bileşenleri bitirinceye kadar devam ederiz. Son olarak bitim noktalarını şekilde gösterildiği gibi birleştiririz.

4-plat'ın bu şekilde ifade edilmesine Conway sembolü denir ve 4-plat'ın minimal diyagramına denk gelir.

Teorem 7.11.1. İki 4-plat eşittir ancak ve ancak aynı Conway sembollerine sahiplerdir ya da eğer biri diğerinin tam olarak tersi olan bir Conway sembolüne sahipse yani birinin Conway sembolü $\langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle$ iken diğerinin Conway sembolü $\langle c_{2k+1}, \dots, c_1 \rangle$ şeklinde olur.



Şekil 7.6: 4-plat çizimi

Conway sembolü $0 < \beta < \alpha$ olmak üzere $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel sayısının hesaplanmasında kullanılır.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots}}$$

şeklinde hesaplanır. 4-plat $\frac{\beta}{\alpha}$ sayısı $b(\alpha, \beta)$ olarak gösterilir.

Teorem 7.11.2. İki 4-plat $b(\alpha, \beta)$ ve $b(\alpha, \beta)$ denktir ancak ve ancak $\alpha = \alpha$ ve $\beta^{\pm 1} \equiv \beta \pmod{\alpha}$

Örneğin; $b(17, 5), b(17, 7)$ 4-plat'leri incelersek $b(17, 5)$ (3, 2, 2)e, $b(17, 7)$ de (2, 23)e karşılık gelir. Sonuç olarak bu iki 4-plat'ın denk oldukları görülür. Zaten $17 = 17$ ve $5^{-1} \equiv 7 \pmod{17}$ olmasından da denk oldukları kolayca görülebilir.

Rasyonel sayıların kullanımı bakımından rasyonel tangle ve 4-plat ler oldukça benzerdir. Eğer verilen $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel sayısı $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$ aralığında ise $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel tangle'inin payda kapanışı $b(\alpha, \beta)$ 4-plat'ini verir ve eğer verilen $\frac{\beta}{\alpha}$ sayısı $\frac{\beta}{\alpha} \geq 1$ aralığında ise $\frac{\beta}{\alpha}$ rasyonel tangle'inin pay kapanışı ise $b(\beta, -\alpha)$ 4-plat'ini verir. Herhangi bir x tamsayısı için $D((d_1, \dots, d_{2k+1}, x)) = \langle d_1, \dots, d_{2k+1} \rangle$ ve $N((d_1, \dots, d_{2k+1}, x, 0)) = \langle -d_1, \dots, -d_{2k+1} \rangle$ olur. Daha öncede bahsettiğimiz gibi iki rasyonel tangle'in toplamının pay kapanışı bir 4-plat idi. Bir sonraki teoremimiz ise rasyonel tangle'ların pay kapanışı ile elde edilen rasyonel düğümlerin denkliği ile ilgili bilgi verecek.

Teorem 7.11.3. $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p'}{q'}$ indirgenmiş kesirleri ile verilen iki rasyonel tangle alalım. Eğer $N(\frac{p}{q})$ ve $N(\frac{p'}{q'})$ tangle'ların pay kapanması sonucu elde edilen rasyonel düğümler olmak üzere bu düğümler birbirlerine karşılık geliyorsa $N(\frac{p}{q})$ ve $N(\frac{p'}{q'})$ topolojik olarak denktir ancak ve ancak $p = p'$ ve $q^{\pm 1} \equiv q' \pmod{p}$ oluyorsa.

7.12 Tangle Denklemlerinin Çözümü

Daha önceki bölümlerde de gördüğümüz gibi tangle denklemleri K düğüm ya da zincir, A ve B tangle olmak üzere $N(A+B) = K$ şeklindeki denklemlerdi. İşte bu denklemlerin çözümü enzim mekanizmalarını daha iyi anlamamız için yardımcı olacaktır.

Lemma 7.12.1. İki rasyonel tangle $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ve $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ verilsin. $N(A_1 + A_2)$ işlemi $b(\alpha, \beta)$ şeklinde bir 4-plat tanımlar ve $\alpha = |\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1|$ olur ve β aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $\alpha = 0$ ise $\beta = 1$;
2. $\alpha = 1$ ise $\beta = 1$;
3. $\alpha > 1$ ise β şu şekilde elde edilir: $0 < \beta < \alpha$ ve $\sigma = \text{sign}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$ ve α'_2 ve β'_2 nin $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ tangle'ının 2. sütunun bileşenleri olduğu yerde $\beta \equiv \sigma(\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2)(\text{mod}\alpha)$ şeklinde bulunur.

$A_1 = 2$ ve $A_2 = \frac{23}{17}$ olarak alalım. $\alpha = |1 \times 23 + 17 \times 2| = 57$ olur. Örnek 8.1 de $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{23}{17}$ tangle'ının matrisini bulmuştuk ve aşağıdaki gibiydi:

$$\begin{bmatrix} u & v' \\ v & u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 4 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$$

buradan α'_2 ve β'_2 değerlerini bulabiliriz. $\beta = (1 \times 4 + 2 \times 3)(\text{mod} 57) = 10$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak işlemin sonucu $N(A_1 + A_2) = b(57, 10)$ bulunur.

Teorem 7.12.1. $A = \frac{\beta}{\alpha} = (a_1, \dots, a_{2n})$ bir rasyonel tangle ve $K = \langle c_1, c_2, \dots, c_{2k+1} \rangle$ bir 4-plat olsun. $N(X + A) = K \neq \langle 0 \rangle$ denkleminin rasyonel tangle çözümü: r herhangi bir tamsayı olmak üzere $X = (c_1, \dots, c_{2k+1}, r, -a_1, \dots, -a_{2n})$ ya da $X = (c_{2k+1}, \dots, c_1, r, -a_1, \dots, -a_{2n})$ olur. Eğer $K = \langle 0 \rangle$ ise $X = (-a_1, -a_2, \dots, -a_{2n})$ tek çözümdür.

A_1 ve A_2 iki farklı rasyonel tangle ve K_1 ve K_2 de 4-plat olsun. $N(X + A_1) = K_1$ ve $N(X + A_2) = K_2$ denklemlerinin en fazla iki farklı rasyonel tangle çözümü vardır.

İspat

$X = \frac{u}{v}$, $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$, $K_1 = b(\alpha, \beta)$ ve $K_2 = b(\alpha', \beta')$ olsun. Lemma 11.1 den $\alpha = |v\beta_1 + \alpha_1u|$ ve $\alpha' = |v\beta_2 + \alpha_2u|$ olarak bulunur. (u, v) -düzleminde bu denklemler iki paralel çifti belirtir. $\frac{u}{v} = \frac{-u}{-v}$ olduğundan bu dört nokta

bu denklem sistemi için en fazla iki farklı rasyonel tangle belirtir. $A_1 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{5}{17}$, $K_1 = b(5, 3)$ ve $K_2 = b(29, 17)$ olsun.

$$\begin{aligned} |v + 3u| &= 5 \\ |5v + 17u| &= 29 \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümü:

$$\begin{aligned} v + 3u &= 5 \\ 5v + 17u &= -29 \end{aligned}$$

buradan $X = -\frac{27}{86}$ çözümünü elde ederiz. Bir diğer çözüm de:

$$\begin{aligned} v + 3u &= 5 \\ 5v + 17u &= -29 \end{aligned}$$

buradan da $X = -\frac{27}{86}$ bulunur.

7.13 Özel Bölge Rekombinasyon

Deoksiribonükleik asit (DNA) hücre çekirdeği içinde sıkıca paketlenmiş uzun ve ince moleküllerdir. Doubleks DNA iki şeritten meydana gelir. Ve bu ikili şerit iki şeker fosfat zinciri molekülün dış kısmını oluştururken, hidrojen bağlı yassı baz çiftler bunları bağlar. DNA yapısındaki dört baz A-adenin, G-guanin, C-sitozin ve T-timin dir. Ve bunlar birbirine hidrojen bağlarla bağlanır. A yalnızca T ile, C ise yalnızca G ile bağlanır. İşte bu yapıya DNA'nın ikili sarmal yapısı denir. Bir satırdaki harfleri okuyarak diğer satıra gelecek olan harfleri tahmin edebiliriz. İşte okunan bu tek şeride DNA'nın genetik dizisi denir. DNA sarmal şekilde sağ-el kuralına göre yarım kıvrılma yapar. Bu her yarım kıvrılmaya *supercoil* denir. Daha öncede bahsettiğimiz gibi DNA birtakım hayati enzim aksiyonları sayesinde topolojik olarak işletilir. Bu enzimatik aksiyonlardan birisi Spesifik-Bölge Rekombinasyondur.

Spesifik-Bölge Rekombinasyon bir DNA bloğunun molekül üzerinde bir pozisyondan diğerine taşınmasıdır. Rekombinasyon ise yeniden düzenleme, gen regülasyonu, kontrol numarasının kopyalanması ve genin tedavisi için kullanılır. Bu uygulama *recombinase* aslı enzim tarafından yapılır. DNA'nın genetik dizisinin küçük bir parçası recombinase tarafından etkilenmiş olursa bu parçaya *rekombinasyon bölgesi* denir. Aynı molekül ya da farklı molekül üzerindeki bölge çifti bir enzim tarafından bağlanır. Bu reaksiyon aşamasına *sinapsis* denir. DNA molekülleri ve enzim ise *sinaptik kompleks*dir. Rekombinasyondan önceki DNA molekülüne *substrat* ve rekombinasyondan sonra ise

product denir. Enzim DNA'ya bağlandığında DNA'nın iki tarafını da kırar ve son kısımlarını farklı şekilde birbiriyle rekombine eder. Rekombinasyon bölgeleri DNA şeridindeki bazlara göre yön alırlar. Enzim DNA'ya bağlanırken rekombinasyon olayı birden fazla kez gerçekleşebilir.

7.14 Tangle Modeli

1980 de DeWitt Sumners tarafından tanıtılan tangle modelin amacı rekombinasyon sırasında olan olayların matematiksel olarak ifade edilmesidir. Bu sayede, DNA ürün ve substratının topolojik ve geometrik olarak enzimin neler yaptığını ifade edebiliriz. Elektron mikrograflarında DNA liflerinin birbiri etrafında dolandığı görülebilir. 4-plat ve rasyonel tangle'lar kıvrılan şeritlerden meydana geldiğinden bunlar DNA modellemesi için oldukça uygun adaylardır. Tangle'ın tanımını hatırlarsak t 'nin yönsüz yay çifti ve B nin 3-küre olduğu yerde B içine gömülmüş (B, t) çifti idi. Bir tangle enzim-DNA kompleksinin modellemesinde kullanılabilir şöyle ki; enzim 3-küre ve iki rekombinasyon bölgesi de iki şerit olacak şekilde. Rekombinasyon olayının en çok gözlenen ürünü ise 4-plattır, bu oldukça akla yatkındır çünkü 4-plat ile enzim-DNA kompleksini modelleyebilir ve değişiklikleri tangle denklemleri ile ifade edebiliriz. Ancak enzim mekanizmasını tangle model ile ifade etmeden önce bir kaç varsayım yapmalıyız. İlk varsayımımız enzim-DNA kompleksini tangle'ların toplamı olarak ifade edeceğiz. E enzim, O_b DNA'nın enzime bağlanan kısmı ve P de reaksiyon sırasında değişen kısım olsun. O nedenle enzim-DNA kompleksini $E = O_b + P$ şeklinde ifade edebiliriz. Tabii ki aynı zamanda enzime bağlı olmayan bir DNA'ya da ihtiyacımız olacak. İşte DNA'nın bu şeklinin de tangle ile ifadesi de O_f olacak. Şimdi ise $N(O_f + O_b + P) = K_0$ tangle denklemini elde ederiz ve bu bize substrat molekülünü verir. İkinci varsayımımız ise rekombinasyon P bölge tangle'ının rekombinasyon tarafından döndürüldükten sonra ki halini ise R recombinant tangle'ı ile ifade edelim. Bu varsayım ile bir rekombinasyon ile P bölge tangle'ı R recombinant tangle'ına dönüşür. Aşağıda ise rekombinasyon dönüşünden sonraki modeli ifade edelim:

$$\begin{aligned} N(O_f + O_b + P) &= K_0 \text{ (substrat)} \\ N(O_f + O_b + R) &= K_1 \text{ (product)} \end{aligned}$$

Ayrıca şunu da unutmamalıyız ki; rekombinasyon mekanizması sabittir, substrat geometrisi ve topolojisinden bağımsızdır. Bu demektir ki; eğer tüm substrat molekülleri aynı düğüm tipinde ise O_f , O_b , P ve R tangle'ları bir olaydan

diğerine değışmez. Eğer substrat molekülleri farklı tipte düğümler ise yalnızca O_f tangle'ı değışir. Yalnız bu durumda göz önünde bulundurmanız gereken tek istisna bölge yönlendirmesidir. Son varsayımımız tangle denklem sistemini tarafından verilen processive rekombinasyon modeli: $O = O_f + O_b$ ve O,P ve R bilinmiyorsa

$$\begin{aligned}
N(O + P) &= K_0 \text{ (substrat)} \\
N(O + R) &= K_1 \text{ (birinci dönüş sonucu ortaya çıkan ürün)} \\
&\vdots \\
N(O + nR) &= K_n \text{ (n. dönüş sonucu ortaya çıkan ürün)}
\end{aligned}$$

ortaya çıkar.

7.15 Örnek

2002 yılında Mariel Vazquez ve De Witt Sumners Gin spesifik-bölgele re-kombinasyonu analiz edebilmek için tangle modeli kullandılar. Bu bölgede onların buluşlarından bahsedeceğiz. Bu tangle modelin spesifik-bölgele rekombinasyon için kullanıldığı yalnızca bir örnektir. Gin,Mu adlı bir bakteriyofaj tarafından kodlanan bir spesifik-bölgele rekombinasyon işlemidir. Bakteriyofaj, bakterileri etkileyen virüslerdir. Faj genomu gix L ve gix R olarak adlandırılan iki rekombinasyon bölgesine sahiptir. Biri DNA'ya bağlanır ve Gin her iki tarafı da kırar, bitim noktalarını yönlendirir ve bunları birleştirir. Gin, çift bağlanma sırasında birden daha fazla rekombinasyon meydana getiren processive rekombinasyon ile etki gerçekleştirir. Gin rekombinasyonun düğümsüz substrat molekülü üzerindeki tangle analizinin sonuçları ters olarak gix bölgelerinde aşağıdaki gibi tekrar edilir:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \langle 1 \rangle \text{ (düğümsüz)} \\
K_1 &= \langle 1 \rangle \text{ (düğümsüz)} \\
K_2 &= \langle 3 \rangle = 3_1 \text{ (trefoil düğümü)} \\
K_3 &= \langle 2, 1, 1 \rangle = 4_1 \text{ (8-figür düğümü)} \\
K_4 &= \langle 2, 2, 1 \rangle \text{ (5-twist düğümü)}
\end{aligned}$$

2004 yılında De Witt Sumners ve Mariel Vazquez yukarıdaki dört denklemin çözümünü veren bir sonuç keşfetti ve tam olarak beşinci denklemi tahmin ettiler.

Teorem 7.15.1. Aşağıdaki denklem sisteminin O,P,R tangel'ları için çözümü olan (O, R)

1. $N(O + P) = \langle 1 \rangle = \text{düğümsüz}$

2. $N(O + R) = \langle 1 \rangle = \text{dügümsüz}$
3. $N(O + R + R) = \langle 3 \rangle = \text{trefoil düğümü}$
ya $((-2, 0), 1)$ ya da $((4, 1), (-1))$ dir. Ayrıca eğer
4. $N(O + R + R + R) = \langle 2, 1, 1 \rangle = 8\text{-figür düğümü}$

ise $(O, R) = ((-2, 0), (1))$ şeklinde bir tek çözüm vardır.

Biz burada O ve R nin rasyonelliğini kontrol etmedik bunun yerine tangle denkleminin nasıl çözüldüğünü inceledik. Daha önce verilen bir lemmada $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ve $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ gibi iki rasyonel tangle verildiğinde $\alpha = |\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1|$ alındığında $N(A_1 + A_2)$ şeklinde ve $b(\alpha, \beta)$ 4-plat'ın eşit olduğunu bulmuştuk. Yukarıda verilen (2) ve (3) denklemlerinden aşağıdaki sistemi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} |u + rv| &= 1 \\ |yu + 2rv| &= 3 \end{aligned}$$

u, r, v bilinmeyen değerlerdir. $(\frac{u}{v}, r)$ sıralı ikilisi için on farklı çözüm elde edebiliriz. Böylece (O, R) tangle çifti için on farklı çözüm elde ederiz. Bu çözümler $((-2, 0), (1), ((1), (-2)), ((5), (-4)), ((-2, -2), (2)), ((4, 1), (-1))$ ve bunların ayna yansımalarıdır. Bir sonraki teorem yardımıyla bu sonuçların bir kısmını eleyebiliriz.

Teorem 7.15.2. Bir sonraki teoremde verilen (1), (2), (3) denklemlerinde verilen tangle'lar ters olarak tekrar edilen bölge G in rekombinasyonundan gelirler. Ve bunlar aşağıda verdiğimiz özellikleri sağlar:

$$O \approx (0, 0), R \approx (1), P \approx (0).$$

$O \approx (0, 0)$ olduğundan ve integral tangle $(0), (1)$ ile eşliği olduğundan O integral tangle'ı için elde edilen sonuçları yok sayabiliriz. Ek olarak, eğer $R \approx (1)$ ise integral tangle'lar (0) eşliğine sahip olmasından dolayı $R = (2)$ çözümünden de kurtulabiliriz. Aynı zamanda (3) denkleminin düğüm ürünü chiral olduğundan ayna yansımalarını da yok sayabiliriz. Böylece yalnızca iki çözümümüz kalır ve bunlardan da yalnız birisi (4) denklemini sağlar.

Bu tangle analizinin ışığında Sumners ve Vazquez G in gix bölgeleri ile bir substrata etki ettiğinde her bir rekombinasyona karşılık gelen dönüşte enzim mekanizması substrata bir pozitif çaprazlama ekler.

Teorem 7.15.3. Aşağıdaki denklem sisteminin O, P, R tangel'ları için çözümü olan (O, R)

1. $N(O + P) = \langle 1 \rangle = \text{dügümsüz}$
2. $N(O + R) = \langle 3 \rangle = \text{trefoil düğümü}$

3. $N(O + R + R) = \langle 1, 2, 2 \rangle = (-5)\text{twist düğümü}$
ya $((-2, 0), (2))$ yada $((2, 1, 1, 2), (-2))$ olur Bunna ek olarak eğer
4. $N(O + R + R + R) = \langle 1, 4, 2 \rangle = (-7)\text{twist düğümü}$
ise $(O, R) = ((-2, 0), (2))$ olur ve
5. her $n \geq 4$ için $N(O + nR) = -(2n+1)\text{twist düğümü}$ olur.

Bu örnekte tangle model Gin mekanizmasının yapısının matematiksel olarak gösterimi için kullanıldı. Ve sonuç olarak bu bize gösterir ki; ters olarak tekrarlanan rekombinasyon bölgeleri tangle'a (1) ekler başka bir deyişle $R = (+1)$ olur. Direkt olarak tekrarlanan bölgelerde ise $R = (+2)$ olur.

Kaynakça

- [1] Colin C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to Mathematical Theory of Knots*, American Mathematical Society, 2004.
- [2] Colin Adams and Robert Franzosa, *Introduction to Topology*, Pearson Prentice Hall Inc., 2008.
- [3] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [4] Stephan C. Carlson, *Topology of Surfaces, Knots, and Manifolds*, John Wiley Sons, Inc, 2001
- [5] Fred H. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [6] Sue E. Goodman, *Beginning Topology*, American Mathematical Society, 2009.
- [7] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] John McCleary *A First Course in Topology*, American Mathematical Society, 2006.
- [9] Robert Messer and Philip Straffin, *Topology Now!*, The Mathematical Association of America, 2006.
- [10] James R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [11] Joseph J. Rotman *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [12] Brian Sanderson, *Lecture Notes (Knot Theory MA3F2)*, 2006.
- [13] Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer-Verlag, New York 2008.