



Yarı-tanjant Demette İzdüşümlü Lineer Konneksiyonlar

Program Kodu: 3001

Proje No: 118F176

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Danışman:

Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

Bursiyerler:

Murat POLAT

Merve Gül ŞİMŞEK

EKİM 2020
ANKARA

ÖNSÖZ

Yarı-tanjant demet, tanjant demetten farklı olup bir pull-back demeti tanımlar. Yapılan bu çalışma ile pull-back demetlerde izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri ayrıntılı olarak analiz edilip, konneksiyon katsayıları hesaplanıp ve elde edilen bulgular ile yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonların çeşitli lift problemleri ele alınmıştır.

Projedeki yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftlerinin araştırılmış olması daha sonra incelenecek olan yarı-demet teorisinde şimdiye kadar çözülmemiş bazı problemlerin çözümünde büyük mesafe alınmasını sağlamıştır.

Projede, yarı-tanjant demetindeki izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri bulunarak yarı-kotanjant demetteki izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri arasındaki ilişkinin incelenmesine önemli katkı sağlamıştır. Ayrıca yarı-tanjant demetlerin Güzel Kare (Good Square) dönüşümüne somut bir örnek olduğu gösterimiştir.

Tanjant demette yer alan metrikler non-dejenere (regüler) metriklerdir. Yarı-tanjant demetteki metriklerin ise dejenere (singüler) metrik olduğu görülmüştür. Fizik alanında ve diferensiyel geometride dejenere metrikler önemli bir öneme sahip olup bu metriklerle çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla elde edilen yeni dejenere metrikler ile gelecekte çok sayıda çalışmalar yapılacaktır.

Bu çalışma TÜBİTAK'ın MFAG'a bağlı 118F176 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir. Vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	3
2.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar.....	3
2.2. Tensör Alanları.....	5
2.3. Vektör Demetleri.....	13
2.4. Lie Operatörü ve Lie Türevi.....	17
2.5. Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Levi-Civita (Afin) Konneksiyon.....	20
2.5.1. Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar.....	25
2.5.2. Eğrilik ve burulma tensörleri.....	29
2.5.3. Konneksiyonların dönüşümü.....	31
2.5.4. Burulması sıfır olan uzaylar.....	34
2.5.5. Riemannian Manifoldları.....	40
3. GEREÇ ve YÖNTEM.....	42
3.1. Tanjant Demet.....	42
3.1.1. Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti.....	45
3.1.2. Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti.....	45
3.1.3. Tanjant Demette 1-Formun Dikey Lifti.....	46
3.1.4. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Dikey Lifti.....	47
3.1.5. Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti.....	48
3.1.6. Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti.....	48
3.1.7. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Tam Lifti.....	49
3.1.8. γ – Operatörü.....	50
3.1.9. Yatay Lift.....	51
3.2. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Tam Liftleri.....	53
3.3. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Lie Türevi, İnfinitesimal Afin Dönüşümler	59

3.4. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Yatay Liftleri.....	61
3.5. Yarı-Tanjant Demet.....	62
3.5.1. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Dikey Lifti.....	65
3.5.2. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Tam Lifti	66
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	67
4.1. Tanjant Demetin Pull-Back Demeti.....	67
4.2. İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Liftleri	69
4.3. İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Yatay Liftleri	92
4.4. (0,2) Tipli Tensör Alanının Dikey Liftleri.....	108
4.5. (0,2) Tipli Tensör Alanının Tam Liftleri	111
4.6. (0,2) Tipli Tensör Alanının Yatay Liftleri	116
4.7. Kotanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Yarı-tanjant Demet.....	120
4.8. Dikey Liftler	122
4.9. γ – operatörü	123
4.10. Vektör Alanının Tam Lifti.....	123
4.11. (1,1) Tipli Tensör Alanlarının Tam Lifti	131
4.12. Vektör Alanlarının Yatay Lifti	133
4.13. (1,1) Tipli Tensör Alanlarının Yatay Lifti	138
5. SONUÇ.....	141
KAYNAKLAR	143

SİMGELER DİZİNİ

g	Pseudo-Riemannian Metriği
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
X	İzdüşümlü Vektör Alanları
F	İzdüşümlü Afinor Alanları
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
$t(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-tanjant Demet
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
T_{km}^i	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü
π	Tabii İzdüşüm
cc	Tam Lift
w	Dikey Lift
HH	Yatay Lift
γ	Gama Operatörü
$^{cc}\nabla$	İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Lifti

ÖZET

Bu projede tM Yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftlerini tanımlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri ile ilgili çeşitli özellikler incelenmiştir. Bu projede infinitesimal lineer dönüşümlere bakılmış olup tM Yarı-tanjant demette $(0,2)$ tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay liftleri ile bunlara ait çeşitli geometrik özellikler incelenmiştir. Ayrıca bu proje ile güzel kare dönüşümlerine yeni bir örnek sunulmuştur.

Proje ile ilgili olarak, kuramsal temel, genel metotlar ve araştırma teknikleri olarak aşağıdakiler kullanılmıştır:

1. Tanjant ve yarı-tanjant demet geometrisi (Kuramsal temel-Tanjant ve yarı-tanjant demetler ve bu demetlerdeki liftler ile çeşitli operatörler)
2. Klasik tensör analizi (indislerin yani lokal koordinatların kullanımı)
3. Kovaryant diferensiyelleme formalizmi (global inceleme tekniği).

Proje sonucu 1 makale uluslararası hakemli dergilere yayınlanmıştır. 7 uluslararası bildiri sunulmuştur. Proje konuları 1 doktora tezi ve 1 yüksek lisans tezi eşliğinde tamamlanmıştır. Ayrıca 1 makale uluslararası indeksli dergilerde ve 2 makale ise uluslararası hakemli dergilere yayınlamak üzere gönderilmiştir. Lisansüstü İngilizce yayın olacak Yarı-demet teorisi kitabım için önemli bir içerik elde edilmiştir.

2020, 145 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tam lift, Kotanjant demet, Dejenere metrik, Yatay lift, pull-back demet, İzdüşümlü lineer konneksiyon, Yarı-tanjant demet, Vektör alanı.

ABSTRACT

In this project, complete and horizontal lifts of projected linear connections in tM semi-tangent bundle are defined. In addition, in this study, various properties related to complete and horizontal lifts of projectable linear connections are investigated.

In this project, infinitesimal linear transformations have been examined and vertical, complete and horizontal lifts of tensor fields of type $(0,2)$ in tM semi-tangent bundle and various geometric properties of them are investigated.

In addition, a new example of beautiful square transformations has been presented with this project.

In relation to the project, the following are used as theoretical basis, general methods and research techniques:

1. Tangent and semi-tangent bundle geometry (Theoretical basis-Tangent and semi-tangent bundles and lifts in these bundles and various operators)
2. Classical tensor analysis (the use of indices, ie. local coordinates)
3. Covariant differentiation formalism (global review technique).

The result of the project was 1 article published in international peer-reviewed journal. 7 international papers were presented. Project topics were completed with 1 doctorate thesis and 1 master thesis. In addition, 1 article was submitted to internationally indexed journal and 2 articles to international peer-reviewed journals. Significant content was obtained for my Semi-bundle theory book, which will be a postgraduate English publication.

2020, 145 pages

Keywords: Complete lift, Cotangent bundle, Degenerate metric, Horizontal lift, Pull-back bundle, Projectable linear connection, Semi-tangent bundle, Vector field.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri geometrik problemleri, diferansiyel ve integral hesaplama tekniklerini kullanarak çözümlmeye çalışan matematiğin bir alt disiplindir. XVII. yüzyılda ortaya çıkan ve güncelliğini koruyan Diferansiyel geometrinin esas konusu, eğrilerin ve Öklid uzayında yüzeylerin incelenmesi olmuştur.

Diferansiyel Geometri’de önemli bir yere sahip olan tensör kavramı güncel anlamda ilk olarak aslında bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898’de kullanıldı. Tensör hesaplamaları 1890’lı yıllarda kısaca Ricci olarak alınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferansiyel hesaplamalar başlığı altında incelendi ve bu çalışmalar 1892 yılında kendisi tarafından sunuldu. Daha sonra Ricci ve Tullio Levi-Civita (1900) mutlak diferansiyel hesaplama metodları ve uygulamaları adı altında çalışmalarını yayımladılar.

Uzayda her bir noktaya sırasıyla bir skaleri veya vektörü tayin eden skaler alanın veya vektör alanın genelleşmiş hali olan tensör alanı, manifold üzerinde tanımlı olup manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren bir dönüşümdür. Matematiksel yapılarda ise tensör alanı ifadesi yerine kısaca tensör kullanılır.

Diferansiyel Geometri’de önemli bir konu olan Riemannian manifoldda tanjant demetlerin Diferansiyel Geometri’sinin incelenmesi ilk olarak Sasaki (1958) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Dombrowski (1962), tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Yano ve Ledger (1965), simetrik uzaylarda tanjant demeti tanımlamışlar ve bununla ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır.

1966 yılında tanjant demette liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma Yano ve Kobayashi (1966)’ya ait tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam ve dikey liftleri olmuştur. Ama “lift” kavramı “genişleme” anlamında Yano ve Kobayashi’den daha önce yapılan Sasaki (1958)’nin çalışmalarında “devam” adı altında görülmektedir. Kandatu (1966), lineer olmayan konneksiyona sahip bir manifoldda tanjant demeti tanımlamıştır.

Yano ve Ishihara (1967) tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleriyle ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır.

Morimoto (1970) tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur.

Yano ve Petterson (1967) çalışmasında lift konusu, kotanjant demet için de incelenmiştir. Yano ve Ishihara (1973) çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant

demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir.

Yarı-tanjant demet ise Duc (1979) tarafından tanımlanmış olup yarı-tanjant demete ait bazı özellikleri Vishnevskii (2002) tarafından incelenmiştir. Yarı-tanjant demette Lie ve kovaryant türevlerinin tam liftleri ise Salimov ve Kadioğlu (2000) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonlar ve bunların bazı özellikleri (eğrilik, burulma tensörleri ile Lie türevleri) Vishnevskii (2002) ve Vishnevskii vd., (1985) de çalışılmıştır. Bu projede ise yarı-tanjant (pull-back) demete izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftlerinin katsayıları hesaplanmış ve yarı-tanjant (pull-back) demette izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri tanımlanıp, konneksiyon katsayıları yardımıyla bunlarla ilgili çeşitli lift problemleri çalışılmıştır. Daha sonra ise yarı-tanjant demette güzel kare (good square) dönüşüme ve infinitesimal lineer dönüşümlere bakılmıştır. Ayrıca Yarı-tanjant (pull-back) demete $(0,2)$ tipli tensor alanlarının dikey, tam, yatay vb. liftleri tanımlandıktan sonra; $(0,2)$ tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay vb. liftlerle ilgili çeşitli problemler araştırıldı. Böylece Yarı-tanjant demette çeşitli metrikler elde edilmiştir. Projede son olarak kotanjant demet T^*M izdüşümü yardımıyla tanjant demetin TM özel bir pull-back (yarı-tanjant tM) demeti tanımlanmış ve bu demete tam ve yatay liftler incelenmiştir. Proje konusunun literatürdeki önemi ise; elde edilen bulgular ile birlikte daha sonra hesaplanacak olan yarı-kotanjant demetteki izdüşümlü lineer konneksiyonlara ait tam ve yatay liftlerinin katsayıları kullanılarak en genel yarı demet olan yarı-tensör demetlerde konneksiyonların liftlerine ulaşılmasıdır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

2.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Bu bölümde manifoldların tanımı verilmekte ve üzerindeki temel yapılar tanıtılmaktadır.

Tanım 2.1.1. M bir Hausdorff topolojik uzay olsun. $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan $\varphi: U \rightarrow V$ homeomorfizm dönüşümüne M uzayında n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine ise φ haritasının koordinat bölgesi veya koordinat komşuluğu denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. $x \in U$ için

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, \dots, x^n$ gerçel sayılarına x noktasının φ haritasındaki koordinatları denir (Salimov ve Mağden 2008)

Tanım 2.1.2. Eğer M Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad (A\text{-indisler kümesi})$$

olacak şekilde bu uzayı örterse M uzayına n boyutlu topolojik manifold yada sadece n boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.3. M Hausdorff topolojik uzay ve $k, 0 \leq k$ şartını sağlayan bir tam sayı olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset M\}$ lokal koordinatlar ailesi M de C^k -sınıfından n boyutlu atlas olarak adlandırılır.

i. M , n boyutlu topolojik manifold, yani lokal haritaların U_α bölgesi M manifoldunu örter

ii. Herhangi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olması durumunda

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. (Bu şarta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

Koordinat dönüşüm kuralı $(u_\beta^i = u_\alpha^i(u_\alpha^j), i, j = 1, \dots, n)$ şeklinde olan $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü denir. Burada u_α^j ve u_β^i , sırasıyla, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarındaki x noktasının koordinatlarıdır. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olması durumunda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. Bu dönüşümlerin C^k sınıfından diffeomorfizmler olması ile yukarıda bashedilen 2.şart denktir. Yani, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobi matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.4. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ atlasının ve (U_β, φ_β) da $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in A}$ atlasının keyfi haritaları olmak üzere eğer bu haritalar C^k uzlaşmış ise yani her iki atlasın birleşimi C^k sınıfından yine bir atlas ise bu atlaslara denk atlaslar denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.1.5. C^k atlaslarının denklik sınıfına M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde C^k yapı adı verilir. C^k yapısının bütün C^k atlaslarının birleşimi olan C^k atlasına maksimal C^k atlas denir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

M Hausdorff uzayı üzerindeki C^k atlaslarının bütün denklik sınıfları kendisinin bir elemanı ile tayin edilebilir. Yani, C^k yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Böylece M üzerindeki her bir C^k yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucuna varılır.

C^k ($1 \leq k \leq \infty$) yapıya düzgün (smooth) yapı, C^0 yapıya ise topolojik yapı denir. Bundan sonra sadece C^∞ yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6. M , sayılabilir bazı olan Hausdorff topolojik uzay olmak üzere eğer M üzerinde n boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmiş ise bu uzaya C^∞ sınıfından n boyutlu diferansiyellenebilir manifold veya düzgün (smooth) manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2 Tensör Alanları

Bu bölümde öncelikle tensör tanımı yapılarak, tensör cebirinin temel kavramları, tensör örnekleri, vektör ve kovektör alanları ile dış form tanıtılmaktadır.

Tanım 2.2.1. B_n , n boyutlu vektör uzayı ve onun dual uzayı ise B_n^* olmak üzere $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1, \dots, q$, q tane vektör ve $\xi^i \in B_n^*$, $i=1, \dots, p$, p tane kovektör değişkenlerine karşılık gelen

$$\omega = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$$

gerçek değerli fonksiyonu eğer her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela $\vec{x}_1$ vektör değişkenine göre, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\omega = t(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) = \lambda t(\vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$$

şeklinde lineerlik şartını sağladığı gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}_{p\text{-tane}} \times \underbrace{B_n^* \times B_n^* \dots \times B_n^*}_{q\text{-tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında q . dereceden kovaryant, p . dereceden kontravaryant tensör denir. Bu şekilde tanımlanan tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına tensörün valentliği, (p,q) gösterimine ise tensörün tipi denir. $(0,q)$ tipli tensörlere kovaryant tensörler, $(p,0)$ tipli tensörlere ise kontravaryant tensörler denir. $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına $(0,0)$ tipli tensör olarak bakılabilir (Şahin 2012).

Örnek 2.2.1. $v^* : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ dual vektörü 1. mertebeden kovaryant tensördür.

Örnek 2.2.2. B_n bir vektör uzayı olmak üzere B_n ile $(B_n^*)^*$ özdeş olduğundan her $u \in B_n$ vektörü, $u : B_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşüm olarak alınırsa, her bir vektör 1. mertebeden kontravaryant vektördür.

Örnek 2.2.3. Her bir bilinear form 2. mertebeden kovaryant tensördür.

Örnek 2.2.4. $\pi : B_n^* \times B_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı 2-lineer dönüşümü 2. mertebeden kontravaryant tensördür.

Örnek 2.2.5. $\mathbb{R}_n^n$ deki matrislerin n – tane kolon vektörü üzerinde determinant fonksiyonu n – lineer olduğundan determinant fonksiyonu n . mertebeden kovaryant tensördür.

Tanım 2.2.2. B_n bir vektör uzayı ve onun dual uzayıda B_n^* olsun. $T_q^p(B_n)$, B_n vektör uzayı üzerindeki p . mertebeden kovaryant ve q . mertebeden kontravaryant tensörlerin uzayı olmak üzere

$$C_j^i : T_q^p \rightarrow T_{q-1}^{p-1}$$

$$A \rightarrow (C_j^i A)(X_2, \dots, X_{p-1}, \omega^2, \dots, \omega^{q-1}) = C \{ A(X_1, \dots, X_{p-1}, \omega^1, \dots, \omega^{q-1}) \}$$

ve

$$(C_j^i A) = \sum_m A(X_m, X_1, \dots, X_{p-1}, \omega^m, \omega^1, \dots, \omega^{q-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon (daraltma, bükülme) operatörü denir. Burada $X_m, X_1, \dots, X_{p-1}$ ve $\omega^m, \omega^1, \dots, \omega^{q-1}$, sırasıyla, B_n üzerindeki baz vektörler ve dual baz vektörleridir. Buradan bir kontraksiyon işleminin, (p, q) tipli tensörü $(p-1, q-1)$ tipli tensöre taşıdığını yani tensörün mertebesini düşürdüğünü söylenebilir (Şahin 2012).

$T_2^0(B_n)$ uzayının tüm simetrik tensörlerinin alt uzayı $S_2(B_n)$ olsun. Keyfi bir $(0, 2)$ tipli $g \in S_2(B_n)$ simetrik tensörü için,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{y} \in B_n \quad (2.1)$$

şartından $\vec{x} = 0$ alınırsa g tensörüne regüler tensör adı verilir. (2.1)'in koordinatlarla ifadesi,

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

şeklindedir. $\forall y^j \in B_n$ için bu eşitlik sağlandığından

$$g_{ij} x^j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

bulunur. Bu denklem sisteminde $x^i = 0$ olması için

$$\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

olmalı. Burada (g_{ij}) , g tensörüne karşılık gelen matristir.

Eğer $g \in S_2(B_n)$ simetrik tensörü regüler ise bu tensöre B_n uzayında esas tensör (metrik tensör) denir. $(\tilde{g}^{ij})$ matrisi esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) nin tersi olmak üzere

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \quad (2.2)$$

eşitliği geçerlidir. B_n vektör uzayı ve onun duali olan B_n^* uzayları arasındaki

$$\xi_i = g_{ik} x^k, \quad (\eta_i = g_{ik} y^k) \quad (2.3)$$

dönüşümünde (2.2) eşitliği kullanılırsa,

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, \quad (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i) \quad (2.4)$$

biçiminde olur. $g \in S_2(B_n)$ simetrik tensörü,

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j$$

invariant bilinear form şeklinde yazılır. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılarak,

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

elde edilir. Buradan, (0,2) tipli g esas tensörü verildiğinde kovektör değişkenlerinin invariant bilinear formu $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ şeklinde bulunur. Burada $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatları olup bu tensöre g tensörünün invers tensörü denir. Ayrıca $\tilde{g}^{ij}$ tensörünün de simetrik olduğu

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\eta, \xi) &= \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j = \eta_i x^i = g_{ik} y^k x^i, \\ \tilde{g}(\xi, \eta) &= \tilde{g}^{ji} \xi_j \eta_i = \xi_j y^j = g_{jk} x^k y^j \\ &= g_{ki} x^i y^k = g_{ki} y^k x^i = \tilde{g}(\eta, \xi) \end{aligned}$$

eşitliklerinden görülür. Buradan, B_n uzayında g simetrik tensörü verildiğinde B_n uzayından B_n^* dual uzayına bir izomorfizm bulunur. Böylece vektör ve kovektörler aynılaştırılır. Hem vektör hemde kovektör $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki} x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik} x_k$$

şeklinde yazılır. $(x^i \rightarrow x_k)$ işlemine indisin indirilmesi, $(x_k \rightarrow x^i)$ işlemine ise indisin yükseltilmesi denir. $S(\vec{x}, \vec{y})$ tensörü incelenecek olursa; indislerin yükseltilmesi işlemi,

$$S_{\cdot j}^{\cdot p} = \tilde{g}^{pi} S_{ij}, \quad S_{i \cdot}^{\cdot p} = \tilde{g}^{pj} S_{ij}, \quad S_{\cdot \cdot}^{pq} = \tilde{g}^{pi} \tilde{g}^{qj} S_{ij}$$

ve indislerin indirilmesi işlemi,

$$S_p^{\cdot j} = g_{pi} S^{ij}, \quad S_p^{i \cdot} = g_{pj} S^{ij}, \quad S_{pq}^{\cdot \cdot} = g_{pi} g_{qj} S^{ij}$$

şeklindedir.

B_n uzayında $g(\vec{x}, \vec{y})$, (0,2) tipli tensör olmak üzere $\vec{x}, \vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımına, bu tensörün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi (trace) denir. $(\vec{x}, \vec{y})$ veya $\vec{x}\vec{y}$ şeklinde gösterilir ve

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x_j y^j \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır.

$Det(g_{ij}) \neq 0$ (regülerlik şartı) olması durumunda skaler çarpıma, regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.3. C^∞ sınıfından bir M_n manifoldunun her p noktasındaki tanjant uzayı T_p olmak üzere her $p \in M_n$ noktasına karşılık gelen tanjant uzayının bir elemanı olan

X_p vektörü karşılık getiren vektör değerli X fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f fonksiyonu M_n manifoldunda bir dönüşüm olmak üzere

$$(Xf)(p) = X_p f$$

şeklinde tanımlanan Xf de M_n manifoldunda bir dönüşümdür.

$U \subset M_n$ koordinat komşuluğu olmak üzere bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

biçimindedir. Burada ξ^i bileşenleri U komşuluğundaki lokal koordinatlara bağlıdır ve

$$\xi^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n$$

şeklinde yazılır.

C^∞ sınıfından bir M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasındaki bütün (p, q) tipli tensörler için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.4. C^∞ sınıfından bir M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı $T_q^p(m)$ olmak üzere her m noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren (p, q) tipli T fonksiyonuna tensör alanı denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Özel olarak; $p = 1, q = 0$ alınırsa $(1, 0)$ tipli bir vektör alanı, $p = 0, q = 1$ alınırsa $(0, 1)$ tipli kovektör alanı ve $p = q = 0$ alınırsa M_n manifoldundaki her m noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Dolayısıyla $(0, 0)$ tipli tensör alanı gerçel değerli bir fonksiyon belirtir.

$f, U \subset M_n$ bölgesinden alınan C^∞ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere her $x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Buda f fonksiyonunun diferansiyelini gösteren df operatörünün $(0, 1)$ tipli bir tensör alanı olduğunu gösterir.

T_m, M_n manifoldunun keyfi bir m noktasındaki tensörü olmak üzere eğer T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı, T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir.

(p, q) tipli bir T tensör alanı için $(0, 1)$ tipli vektör alanları $X_1, \dots, X_q$ ve $(0, 1)$ tipli tensör alanları da $\theta_1, \dots, \theta_p$ olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

eşitliği gerçel değerli fonksiyon belirtir.

T tensör alanının bileşenleri x^i koordinatlarına göre,

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})$$

biçiminde olup gerçel değerli fonksiyonlardır (Bishop ve Goldberg 1968).

T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için bileşenlerinin C^∞ sınıfından fonksiyonlar olması gerekir. C^∞ sınıfından $(0, 1)$ tipli tensör alanlarına 1-form (kovektör alanı) veya Pfaffian form denir.

Her bir $\theta_1, \dots, \theta_p$ 1-formları ve her bir $X_1, \dots, X_q$, C^∞ sınıfından vektör alanları için T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.5. $(0, 2)$ tipli bir $\omega = (\omega_{ij})$ tensörü için verilen indislere göre antisimetriklik şartı varsa $\omega = (\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir.

Herhangi bir k-forma dış diferansiyel uygulanırsa $(k+1)$ -form elde edilir. Yani ω , k-form ise $d\omega \in T_{k+1}(M_n)$ olup $(k+1)$ -form oluşur. Bu şekildeki $(k+1)$ formlara tam form denir.

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

eşitliğinin sağlanması durumu tam formların önemli bir özelliğidir. Yani tam formlara dış diferansiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur (Şahin 2012).

Örnek 2.2.6. $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dy$ formunun tam form olmadığını ya da kapalı form olmadığını gösterelim. Dış diferansiyel için

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + x d(dy \wedge dz) - dy \wedge dx \wedge dy - y d(dx \wedge dy)$$

olup $d^2 = 0$ olduğundan

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz - dy \wedge dx \wedge dy$$

elde edilir. Ayrıca $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ olduğu kullanılırsa

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dy \wedge dz$$

olur. Diğer taraftan $dy \wedge dy = 0$ olup

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

elde edilir. Burada $dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$ olduğundan ω bir kapalı form değildir. Dolayısıyla tam form da değildir.

2.3 Vektör Demetleri

Bu alt bölümde fibre demetleri, vektör demetleri ve üzerindeki diferansiyellenebilir yapılar tanıtılarak vektör demeti örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.3.1. B, E, F, C^∞ sınıfından birer manifold ve $\pi: E \rightarrow B$ de C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun. Eğer

$$(\pi \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha: U_\alpha \subset B \times F &\rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \xrightarrow{\pi} B \\ (x, y) &\rightarrow \varphi_\alpha(x, y) \longrightarrow (\pi \circ \varphi_\alpha)(x) = x \end{aligned}$$

diffeomorfizmlerinin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π dönüşümüne F manifolduna göre lokal çarpım özelliğine sahip dönüşüm denir. $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π dönüşümünün lokal ayrışması denir. Burada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, B manifoldunun bir açık örtüsüdür. $C^\infty(E, B) = \{\pi| \pi: E \rightarrow B\}$ cümlesinin herhangi bir elemanı lokal çarpım özelliğini sağlaması halinde bu dönüşüme açık ve örten bir dönüşüm denir (Husemoller 1994).

Tanım 2.3.2. Eğer lokal çarpım özelliği olan bir $\pi: E \rightarrow B$ dönüşümü varsa $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne diferansiyellenebilir fibre demeti denir.

Bir fibre demetinde, E manifolduna baz manifoldu veya total uzay, F manifolduna fibre modeli, B manifolduna baz uzay ve π dönüşümüne de izdüşüm veya fibrasyon denir. Fibre demeti E veya $\pi: E \rightarrow B$ şeklinde gösterilir (Husemoller 1994).

Tanım 2.3.3. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \mid \pi(u) = x\}$$

kümesine x üzerinde fibre denir. Burada $\pi: E \rightarrow B$ bir fibre demetidir. Tüm F_x fibrelerinin ayrık birleşimi

$$E = \bigcup_{x \in B} F_x$$

total uzayını verir (Duggal ve Bejancu 1996).

Not 2.3.1. Fibre demeti için verilen tanım gözönüne alınarak, bir manifold ve onun bütün tanjant uzayları ile birlikte bir fibre demeti olduğu söylenebilir. Bu durumu daha iyi görebilmek için M 1-boyutlu manifold (eğri) olmak üzere eğrinin her noktadaki teğet vektörleri (tanjant uzayları) ele alalım. $p \in M$ noktasındaki teğet vektörü olan T_p üzerindeki her nokta, uzunluğu olan ve p noktasında M manifolduna teğet olan bir vektör gösterir. Böylece her nokta için sadece bir vektör ve bir nokta karşılıklı olarak vardır. Buradan, bütün noktalarındaki bütün vektörler topluluğu aynı anda gözönüne alınırsa yeni bir manifold tanımlanabilir. Her nokta ve bu noktadaki vektör elde edilen yeni manifoldun noktalarını oluşturacağı için manifold 2-boyutlu olur. Böylece 2-boyutlu fibre demeti elde edilir. Bu fibre demetinde her p noktasındaki T_p tanjant uzayları demetin fibreleri olur. Burada alınan 1-boyutlu manifold (eğri) fibre demetinin baz manifoldudur (Şahin 2012).

Tanım 2.3.4. M ve B diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $\pi: M \rightarrow B$ diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $E(M, B, \pi)$ ye B manifoldu üzerinde vektör demeti denir.

1. Her $p \in B, \pi^{-1}(p)$ vektör uzayı yapısına sahip olup bu uzayın boyutu her zaman sabit kabul edilir. $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayına vektör demetinin fibresi denir.
2. Herhangi $p \in B$ noktasının bir komşuluğu U , $n \geq 0$ sayısı ve

$$h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

diffeomorfizm dönüşümü var öyle ki keyfi $q \in U$ için

$$h_q: \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$y \rightarrow h(q, y)$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ ile $\pi^{-1}(q)$ arasında bir lineer izomorfizmadır.

Burada M manifolduna baz manifoldu, B manifolduna üs manifoldu, π dönüşümüne izdüşüm dönüşümü, $\pi^{-1}(p)$ uzayına p noktasındaki fibre ve (U, h) ikilisine de M manifoldunun koordinat haritası denir. Bir fibre demeti ile vektör demetinin karşılaştırılmasından $F = \mathbb{R}^n$ ve F_x 'in vektör uzayı olduğu kolayca görülür (Şahin 2012).

Vektör demetine aşağıdaki gibi örnekler verilebilir.

Örnek 2.3.1. M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $M \times \mathbb{R}^n$ bir vektör demetidir. Bu vektör demeti aşikar vektör demeti olarak adlandırılır. Bu vektör demetinin izdüşümü, $(p, x) \in M \times \mathbb{R}^n$ noktası için $\pi(p, x) = p$ ile tanımlıdır. Diğer taraftan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda_1(p, x_1) + \lambda_2(p, x_2) = (p, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

olarak tanımlanırsa fibreler vektör uzayı yapısına sahip olur.

Örnek 2.3.2. $T_p M$, $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere diferansiyellenebilir M manifoldunun tüm p noktalarındaki $T_p M$ tanjant uzaylarının birleşimi

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

şeklindedir. $(p, V) \in TM$ ikilisi için $\pi: TM \rightarrow M$ izdüşümünü $\pi(p, V) = p$ ile tanımlayalım. Bu durumda $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $V_1, V_2 \in T_p M$ ve $p \in M$ için

$$\lambda_1(p, V_1) + \lambda_2(p, V_2) = (p, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)$$

işlemi ile birlikte $\pi^{-1}(p)$ fibresi vektör uzayı yapısına sahip olmaktadır. Diğer taraftan $p \in M$ için M manifoldunda $\phi(U) = \{(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde p noktasının bir U komşuluğu ve ϕ koordinat dönüşümü vardır. p noktasındaki $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$ tanjant vektörü ve

$$h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$(p, V) \rightarrow h(p, V) = \sum_{i=1}^n V_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$$

dönüşümü tanımlansın. $e = \sum_{i=1}^n e_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$ için

$$h^{-1}(e) = (\pi(e), (e_1, \dots, e_n))$$

olur. Böylece h dönüşümü bir diffeomorfizma belirtir. Sonuç olarak TM , M manifoldu üzerinde bir vektör demetidir ve bu vektör demetine tanjant demet denir (Şahin 2012).

Tanım 2.3.5. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ ve $\zeta' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olmak üzere eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ζ' vektör demetine, ζ vektör demetinin altvektör demeti denir.

1. $B = B'$,
2. $\forall x \in B'$ için F'_x fibresi F_x fibresinin bir altvektör uzayıdır,
3. $\iota: E' \rightarrow E$ inclusion dönüşümü diferansiyellenebilirdir (Steenrod 1951).

2.4 Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 2.4.1. X ve Y , bir $U \subset M_n$ açık kümesinde tanımlı olan vektör alanları ve f fonksiyonu $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ cümlesinin bir elemanı olmak üzere X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü,

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

eşitliği ile verilir ve $[X, Y]$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 2003). ∂_i doğal çatısına göre $[X, Y]$ vektör alanının ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j$$

şeklindedir. Özel olarak $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ alınırsa,

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.1. x, y ve z , R^3 Öklidyen uzayının koordinatları olmak üzere $U = z \frac{\partial}{\partial z}$,

$V = x \frac{\partial}{\partial z}$ alalım.

$$\begin{aligned} [U, V]f &= \left[z \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial z} \right] f = z \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial}{\partial z} (f) \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial z} (f) \right) \\ &= zx \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - x \frac{\partial f}{\partial z} - xz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $[U, V] = -V$ olur.

Lie operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (Lineerlik)
- ii. $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anti-simetriklik)
- iii. $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$ (Leibniz Şartı)
- iv. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)
- v. $[fX, Y] = -(Yf)X + f[X, Y]$
- vi. $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X, Y]$

Tanım 2.4.2. Aşağıdaki şartları sağlayan X vektör alanı yönündeki L_X , $X \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$ tensör diferansiyelleme işlemine Lie diferansiyellemesi denir.

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n),$
2. $L_X Y = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M_n).$

$L_X Y$ nin lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferansiyelmesi kullanılarak elde edilen değere Lie türevi denir.

Keyfi tipli bir $t \in \mathfrak{T}_s^r(M_n)$ tensör alanı için Lie türevi formülü

$$L_X t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\lambda=1}^s (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{\lambda=1}^r (\partial_k X^{i_\lambda}) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots k \dots i_r}$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008).

Not 2.4.1. Bazı temel tensörlerin Lie türevleri aşağıdaki gibidir:

i. (1,0) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X Y^i = X^m \partial_m Y^i - Y^m \partial_m X^i$$

ii. (0,1) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X w_i = X^m \partial_m w_i + \partial_i X^m w_m$$

iii. (1,1) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X t_j^i = X^m \partial_m t_j^i - \partial_m X^i t_j^m + \partial_j X^m t_m^i$$

iv. (0,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X g_{ij} = X^m \partial_m g_{ij} + \partial_i X^m g_{mj} + \partial_j X^m g_{im}$$

v. (1,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X S_{ij}^k = X^m \partial_m S_{ij}^k - \partial_m X^k S_{ij}^m + \partial_i X^m S_{mj}^k + \partial_j X^m S_{im}^k$$

vi. (1,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X R_{ijk}^s = X^m \partial_m R_{ijk}^s - \partial_m X^s R_{ijk}^m + \partial_i X^m R_{mj}^s + \partial_j X^m R_{im}^s + \partial_k X^m R_{ijm}^s$$

2.5 Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Levi-Civita (Afin) Konneksiyon

$\gamma: u^i = u^i(t)$ eğrisinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralı; diferansiyellenebilir bir M_n manifolduna γ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesidir. γ eğrisinin keyfi bir noktasındaki v^i vektörü alınan t parametresine bağlı olarak değişip konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalıyorsa bu durumda v^i vektörünün alınan konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırıldığı söylenebilir. Paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilir fonksiyonlar olması için verilen konneksiyonun diferansiyellenebilir olması gerekir. Vektörlerin paralel kaydırılması durumunda lineer bağımlılık şartı korunursa bu konneksiyona lineer veya afin konneksiyon denir.

Bir vektörün eğri boyunca alınan afin (lineer) konneksiyona göre paralel kaydırılması, yani verilen afin konneksiyonunun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasındaki uygunluğunu ifade eden şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki a_k^i , $k=1, \dots, n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $a_k^i(t)$ nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k a_k^i$ vektörünün afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Böylece,

$$dv^i = \lambda^k da_k^i \quad (2.6)$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k a_k^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = a_i^k v^i \quad (2.7)$$

olur. (2.6)'da verilen a_k^i baz vektörüdür ve a_i^k da buna karşılık gelen kobaz vektörüdür.

Dolayısıyla $a_k^i a_i^s = \delta_k^s$ eşitliği geçerlidir. (2.7) eşitliği (2.6)'da kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k ,

$$\omega_i^k = -a_i^s d_s a^k \quad (2.9)$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9)'da verilen ω_i^k , bağlantı objeleri veya konneksiyon formları olarak adlandırılır.

Teorem 2.5.1.

- i. Bağlantı objeleri (konneksiyon formları), $\{a_k^i\}$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.
- ii. Bağlantı objeleri, eğrisel koordinatların dönüştürülmesinde tensörlerin dönüşüm kuralına göre dönüşmezler (Kobayashi ve Nomizu 1963).

İspat:

- i. Farklı bazlara karşılık gelen ω_i^k ve $\bar{\omega}_i^k$ konneksiyon formları olmak üzere v^i vektörünün verilen konneksiyona göre paralel kaydırılması şartı her ikisi için, sırasıyla,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \quad (2.10)$$

$$dv^i + \bar{\omega}_k^i v^k = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.10), (2.11) ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartlarından $\omega_k^i = \bar{\omega}_k^i$ bulunur.

- ii. M_n manifoldunun U bölgesindeki u^i eğrisel koordinatların değişmesi durumunda baz vektörlerin ve kovektörlerin dönüşüm kuralı

$$a_i^k = A_i^{i'} a_{i'}^k, \quad a_k^i = A_{i'}^i a_k^{i'} \quad (2.12)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ şeklindedir. (2.12) deki ikinci eşitliğin diferansiyeli alınırsa,

$$da_k^i = dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'} \quad (2.13)$$

olur. (2.9) eşitliğinde, (2.12) deki eşitliklerden birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği kullanılarak,

$$\omega_j^i = -a_j^k da_k^i = -A_j^{j'} a_{j'}^k \left(dA_{i'}^i a_k^{i'} + A_{i'}^i da_k^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{i'}^i \quad (2.14)$$

elde edilir. Bu eşitlik konneksiyon formlarının yani bağlantı objelerinin, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Bir kovektörün alınan konneksiyona göre paralel kaydırılması şartı aşağıdaki tanım ile verilebilir.

Tanım 2.5.1. Bir ω_i kovektörünün alınan afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılması şartı; γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan herhangi bir v^i vektörü üzerindeki izinin bu eğri boyunca sabit kalmasıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} d(v^i \omega_i) &= dv^i \omega_i + v^i d\omega_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

denklemini yazılır. Bir v^i vektörünün paralel kaydırılması,

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \quad (2.16)$$

şartı ile verilir. Bu eşitlik (2.15) de yazılırsa,

$$(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k) v^i = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece keyfi bir v^i vektörü için, ω_i kovektörün afin konneksiyonuna göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartının,

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde olduğu bulunur.

Şimdi de vektör ve kovektör alanlarının γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartı kullanılarak, verilen eğrinin çeşitli noktalarına uygulanan (p, q) tipli tensörün paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

(p, q) tipli keyfi tensörün izi γ eğrisi boyunca

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p$$

şeklinde verilsin. Bu fonksiyondaki vektör ve kovektör değişkenlerinin verilen eğri boyunca paralel kaydırılması şartları göz önünde bulundurulursa Z fonksiyonunun diferansiyeli,

$$\begin{aligned} dZ &= dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \\ &\quad + \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots d \omega_{i_p}^p \\ &= \left(dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{sj_2 \dots sj_q}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{sj_2 \dots sj_q}^{si_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots sj_q}^{i_1 \dots s} \right) v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \end{aligned} \quad (2.18)$$

olarak yazılır. (2.18) eşitliğinde

$$\delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{sj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{sj_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{si_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots si_p} \quad (2.19)$$

olarak alınması durumunda Z fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dZ = \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \quad (2.20)$$

olarak bulunur. Verilen γ eğrisi boyunca alınan afin konneksiyona göre vektör ve kovektör değişkenlerinin paralel kaydırılması ile bulunan multilineer fonksiyonunun diferansiyeli de vektör ve kovektör değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. Böylece bulunan dZ multilineer fonksiyonuna tipi $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün tipi ile aynı olan belirli bir tensör karşılık gelir. Bu tensörün tipi ile $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün tipi aynı olur ve koordinatları ise (2.19) daki gibi olur. Burada $\delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörüne $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferansiyeli denir.

Tensörün mutlak diferansiyelinin tanımından aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

1. Vektör ve kovektör (1-form) değişkenlerinin paralel kaydırılması şartları, sırasıyla,

$$\delta v^i = 0, \quad \delta \omega_i = 0$$

biçiminde olup (p, q) tipli tensörün paralel kaydırılması koşulunda

$$\delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0$$

şeklinde verilir.

2. Birim tensörün de mutlak diferansiyeli,

$$\delta(\delta_i^j) = 0$$

biçimindedir.

Tensörlerin mutlak diferansiyelleri ya da tensör diferansiyellemesi için aşağıdaki özellikleri yazılabilir:

- i. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir (Lineerlik şartı),
- ii. $\delta(\lambda t) = (\delta\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,
- iii. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, (Leibniz Kuralı) burada A ve B keyfi tipli tensörler olup $\otimes$ işareti tensör çarpımıdır.
- iv. Tensörlerin kontraksiyon, simetrikleştirme ve alterneleştirme işlemleri mutlak diferansiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir. Mesela $\delta(Ct) = C(\delta t)$ olacak şekilde δ işlemi kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

2.5.1 Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 2.5.1.1. Diferansiyellenebilir X_n manifoldunun bütün eğrileri boyunca afin konneksiyonu verilsin. X_n diferansiyellenebilir manifoldu lineerlik şartını sağlarsa X_n manifolduna n - boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Şimdi burada geçen lineerlik şartını inceleyelim:

M , X_n manifoldundan alınan keyfi bir nokta ve komşuluğu bu noktada olan keyfi vektör alanları alınsın. M noktasından geçen herhangi bir eğri için hesaplanmış keyfi bir v^i vektör alanının mutlak diferansiyeli,

$$\delta v^i = v_k^i du^k \quad (2.21)$$

olarak yazılır. (2.21) eşitliği elementer yer değişme işlemi bu eğri boyunca du^i vektörünün lineer fonksiyonudur. Buradaki v_k^i , noktaya ve v^i vektör alanına bağlı bir fonksiyondur. du^k da buradaki bütün vektörlere teğet olan vektörün koordinatlarıdır. Ayrıca $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğun için

$$\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k \quad (2.22)$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega_k^i v^k = (v_s^i - \partial_s v^i) du^s \quad (2.23)$$

eşitliği bulunur. Burada v^k , $\partial_s v^i$ nin ve v_s^i ler de u^i lerin fonksiyonlarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişinden bağımsız olduğu için ω_k^i formları du^k koordinatlarının lineer fonksiyonu olup

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \quad (2.24)$$

şeklinde yazılır. Γ_{sk}^i katsayıları, afin (lineer) uzayın bir noktasının fonksiyonları olup afin konneksiyonun katsayıları olarak adlandırılır. X_n manifoldunda konneksiyon katsayıların verilmesi afin konneksiyonunu tayin eder.

Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı:

(2.24) eşitliğinden,

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

olur. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) du^k \quad (2.25)$$

olduğundan ve $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin her iki tarafının ∂_k kısmi diferansiyeli alınır

$$\begin{aligned} \partial_k (A_j^{j'} A_{j'}^i) &= \partial_k (\delta_j^i) = 0 \\ (\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i + A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) &= 0 \\ A_j^{j'} (\partial_k A_{j'}^i) &= -(\partial_k A_j^{j'}) A_{j'}^i \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik (2.25) de kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i (\partial_k A_j^{j'}) du^k \quad (2.26)$$

olur. Böylece (2.14), (2.24) ve (2.26) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \quad (2.27)$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ şeklindedir.

Afin konneksiyonuna sahip uzayda verilen keyfi bir vektör alanının mutlak diferansiyeli, (2.24)'den

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s) du^k \quad (2.28)$$

şeklinde olur. (2.28) denkleminde sol taraftaki δv^i bir tensör olup du^k da vektör olduğu için parantez içindeki ifade tensörün koordinatlarını verecektir. Bu şekilde verilen tensör için verilen v^i tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \quad (2.29)$$

şeklinde gösterilir. Kovaryant türev $(1,1)$ tipinde bir tensör belirtir.

Aynı şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi de,

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma_{kj}^s \omega_s \quad (2.30)$$

şeklinde olup, sonuç $(0,2)$ tipli bir tensördür.

Şimdi de keyfi (p,q) tipli tensör için kovaryant türevi inceleyelim.

Keyfi (p,q) tipli $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün mutlak diferansiyeli, (2.24) eşitliğinden

$$\delta t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = (\partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{ks}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) du^k \quad (2.31)$$

şeklinde olur. Bu denklemin sol tarafı bir tensör olup du^k vektör olduğu için parantez içindeki ifade bu tensörün koordinatlarıdır. Böylece,

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{ks}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^s t_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (2.32)$$

denklemini elde edilir. Buna $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensörünün kovaryant türevi denir.

(p,q) tipli bir tensörün kovaryant türevinin (p,q+1) tipli bir tensör olduğu kovaryant türev tanımından görülür. Kovaryant türevin, tensörün kovaryantlık derecesini bir artırdığı söylenebilir.

Kovaryant türevin tanımından;

$$i. \nabla_k (t_{1j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp t_{2j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = \nabla_k t_{1j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \nabla_k t_{2j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

$$ii. \nabla_k (\lambda t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (\partial_k \lambda) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mp \lambda \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, \quad \lambda \in F(M_n)$$

$$iii. \nabla_k (t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}) = \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \otimes \nabla_k g_{s_1 \dots s_q}^{l_1 \dots l_p}$$

iv. Tensörlerin kontraksiyon, simetrikleştirme ve alterneleştirme gibi işlemlerde mutlak diferansiyelleme kullanılarak işlem öncelik sırası değişebilir, şeklinde özellikler yazılabilir (Bishop ve Goldberg 1968).

Şimdi de afin konneksiyonun invariant tanımını inceleyelim:

Tanım 2.5.1.2. $T_0^1(M_n)$, M_n manifoldunda vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y): T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \rightarrow T_0^1(M_n)$$

ile tanımlı dönüşüm,

$$\text{i. } \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$\text{ii. } \nabla_Z(fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ konneksiyonuna afin (lineer) konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T_0^1(M_n) \rightarrow T_0^1(M_n)$$

ifadesine ise X vektör alanı yönündeki kovaryant diferansiyelleme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

2.5.2 Eğrilik ve Burulma Tensörleri

Afin konneksiyonuna sahip A_n uzayında diferansiyellenebilir bir $f = f(u^1, \dots, u^n)$ fonksiyonu verilsin. Koordinatların dönüşümü durumunda bu fonksiyonun $df = \partial_k f du^k$ tam diferansiyeli invaryant kalır. Böylece df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olup bu lineer fonksiyonuna karşılık gelen kovektör; V_i , f fonksiyonunun gradienti ve bu fonksiyon da kovektörün potansiyel fonksiyonu olmak üzere,

$$V_i = \partial_i f \quad (2.33)$$

olarak gösterilir.

Herhangi bir V_i kovektörünün keyfi bir skaler alanın gradientinin olması

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \quad (2.34)$$

gerek ve yeter şartına bağlıdır (Yano 1968).

Gradient kovektörü olan V_i nin kovaryant türevi,

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (2.35)$$

şeklinde olup i ve j indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılarak, (2.34)'den

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k \quad (2.36)$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k \quad (2.37)$$

olarak alınmıştır. (2.36) eşitliğindeki kovaryant türev, (0,2) tipli bir tensör belirttiğinden S_{ij}^k nicelikleri de alt indislere göre antisimetrik olup (1,2) tipli tensörün bileşenlerini verir. S_{ij}^k tensöre A_n afin uzayının burulma veya torsion tensörü denir. Keyfi $X, Y \in A_n$ vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formu,

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.38)$$

şeklindedir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Keyfi v^i vektörünün kovaryant türevi, (1,1) tipli tensör olup $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^i v^m$ şeklinde gösterilir. Bu tensörün de kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^i v^k) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sm}^m v^k) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \end{aligned}$$

olur. Bu denklemden r ve s indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^i v^k - 2S_{rs}^k \nabla_k v^i \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
R_{rsk}^i &= \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m \\
&= 2(\partial_{[r} \Gamma_{s]k}^i + \Gamma_{[r|m}^i \Gamma_{s]k}^m)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak alınmıştır. $\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i$ ve $S_{rs}^k \nabla_k v^i$ tensör olup v^k keyfi vektör olduğu için R_{rsk}^i , (1,3) tipli tensör belirtir. Buna A_n uzayının Riemannian- Christoffel tensörü veya Eğrilik tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak;

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \omega_k = -R_{rsk}^m \omega_m - 2S_{rs}^m \nabla_m \omega_k, \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi_i^j = R_{rsm}^j \varphi_i^m - R_{rsi}^m \varphi_m^j - 2S_{rs}^k \nabla_k \varphi_i^j, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
2\nabla_{[r} \nabla_{s]} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= R_{rsm}^{i_1} t_{j_1 \dots j_q}^{mi_2 \dots i_p} + \dots + R_{rsm}^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m} \\
&\quad - R_{rsj_1}^m t_{mj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - R_{rsj_q}^m t_{j_1 \dots m}^{i_1 \dots i_p} - 2S_{rs}^k \nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

formülleri yazılabilir. (2.42) formülüne φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Eğrilik tensörü invaryant formda keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \tag{2.44}$$

şeklinde de yazılabilir (Kobayashi ve Nomizu 1963).

2.5.3 Konneksiyonların Dönüşümü

Afin konneksiyonu ile verilen keyfi iki uzayın difeomorfizmine bakalım. Bu iki uzay için uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilmesi, karşılıklı noktalarının koordinatlarının aynı olması ile mümkündür. Bu şekilde karşılık getirme işlemi, bir differensiyellenebilir X_n manifoldunda herhangi iki afin konneksiyonun verilmesi halinde de oluşturulabilir. Bu şekilde karşılık getirme işlemi, paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi veya

konneksiyonların dönüştürülmesi olarak da değerlendirilebilir. Herhangi bir manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar alınabilir. Bir M_n manifoldunda, sırasıyla, Γ_{ij}^k ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonlarını alalım. Keyfi bir v^i vektör alanının kovaryant türevleri bu konneksiyonlara göre

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m,$$

$$\bar{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \bar{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\bar{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \quad (2.45)$$

eşitliği elde edilir. Burada T_{km}^i ,

$$T_{km}^i = \bar{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlıdır. (2.46) eşitliğinden T_{km}^i tensörünün (1,2) tipli tensör meydana getirdiği söylenebilir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü veya gerilme tensörü denir.

Teorem 2.5.3.1. Γ_{km}^i , ∇ afin konneksiyonunun katsayıları ve T_{km}^i , (1,2) tipli tensör olmak üzere $\bar{\Gamma}_{km}^i$ konneksiyon katsayıları da başka bir afin konneksiyonun katsayılarıdır (Kobayashi ve Nomizu 1963).

İspat: (2.46)'dan

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$$

yazılabilir. Γ_{ij}^k katsayıları için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi durumunda

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k = A_{k'}^k A_{i'}^{i'} A_{j'}^{j'} (\bar{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'}) + A_{k'}^k A_{ij}^{k'} \quad (2.47)$$

eşitliği elde edilir. Burada T_{ij}^k tensör olup tensör dönüşüm kuralından,

$$T_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} T_{i'j'}^{k'} \quad (2.48)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik (2.47) de kullanılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = A_{k'}^k A_i^{i'} A_j^{j'} \bar{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^k A_{ij}^{k'}$$

olur. Bu denklem, $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü yani konneksiyon dönüşüm kuralını sağladığını ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremden yararlanarak aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 2.5.3.1. Keyfi bir λ skaleri için, Γ_{ij}^k ve $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \lambda \bar{\Gamma}_{ij}^k}{1 + \lambda} \quad (2.49)$$

ifadesinin de yine bir afin konneksiyonun katsayıları olduğu söylenebilir.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{\lambda}{1 + \lambda} (\bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k) \quad (2.50)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikteki $\bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ terimi tensör olduğu için Teorem 2.5.1. gözönüne alınırsa Γ_{ij}^k ifadesi afin konneksiyon belirtir. Yani kullanılan iki farklı konneksiyondan yeni bir konneksiyonun oluşturulduğu söylenebilir.

Özel olarak $\lambda = 1$ alınması durumunda,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k}{2} \quad (2.51)$$

olur. Γ_{ij}^k ve Γ_{ij}^k konneksiyonlarına göre $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyonuna orta konneksiyon denir.

Sonuç 2.5.3.2. Γ_{ij}^k afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ katsayıları da afin konneksiyon belirtir.

İspat: Burulma tensörü

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)$$

şeklinde tanımlı olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k + 2S_{ij}^k, \quad \tilde{\Gamma}_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (2.52)$$

biçiminde yazılır. Teorem 2.5.1'e göre $\tilde{\Gamma}_{ji}^k$ katsayıları bir afin konneksiyon tayin eder.

Burada kullanılan $\tilde{\Gamma}_{ji}^k$ ve Γ_{ji}^k konneksiyon katsayıları karşılıklı konneksiyon olarak adlandırılır.

2.5.4 Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfır olup bu uzayların konneksiyon katsayıları aşağıdaki indislere göre simetrik ve

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

eşitliği geçerlidir. Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın herhangi bir eğrisel koordinat sistemine göre $\overset{\circ}{u}^1, \dots, \overset{\circ}{u}^n$ koordinatlarına sahip $O(\overset{\circ}{u}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verildiği eğrisel koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin de $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyon katsayıları ile verildiğini varsayalım. Bu şekilde oluşturulacak olan yeni koordinatları,

$$u^{i'} = \delta_k^{i'} \{ (u^k - \overset{\circ}{u}^k) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Gamma}_{pq}^k (u^p - \overset{\circ}{u}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}^q) \} \quad (2.53)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\delta_k^{i'}$, Kronecker sembolüdür. (2.53) ifadesi u^i den $u^{i'}$ ye diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ip}^k (u^p - \overset{\circ}{u}^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (2.54)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik O noktasında ve çevresinde $\det(A_i^{i'}) \neq 0$ şartını sağlar. Bu şartın sağlanması (2.53) dönüşümünün diferansiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfından olduğu söylenebilir. (2.54) eşitliklerindeki türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k \quad (2.55)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.27) ve (2.55) eşitlikleri kullanılarak, yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki konneksiyon katsayılarının değerleri,

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \delta_{i'}^i \overset{\circ}{\Gamma}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^i \delta_l^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}_{kj}^l$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

olur. Böylece burulması sıfır olan afin uzayın bütün noktalarında öyle bir koordinat sistemi vardır ki, bu sisteme göre konneksiyon katsayılarının bu noktadaki her bir değeri sıfır olur. (2.53) eşitliğinde verilen koordinatlar normal koordinat sistemi olarak ifade edilir.

Eğrilik tensörü için burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i. $R_{(rs)k}{}^i = 0,$

ii. $R_{[rsk]}{}^i = 0,$

iii. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^i = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (2.Bianchi özdeşliği).

Bu eşitliklerin invaryant (tensör) karakter taşıdığı dikkate alınır, ispatlarını normal koordinat sistemini kullanarak incelemek hem daha kolay hemde yeterli olacaktır.

a_{ij} burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayda $(0,2)$ tipli, simetrik ve regüler bir tensör olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \quad (2.56)$$

biçiminde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilirse,

$$\begin{aligned} \partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\ \partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\ \partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} &= \nabla_j a_{ki}. \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Buradaki son iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (2.57)$$

eşitliği bulunur. Bununda her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \{r\}_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \quad (2.58)$$

olur. Burada

$$\{r\}_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}) \quad (2.59)$$

şeklinde olup buna a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları (Levi-Civita konneksiyonu) veya Christoffel sembolü denir. Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları; $(0,2)$ tipli, regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.5.4.1. A_n burulmasız afin konneksiyonlu uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}, e = e_{12 \dots n}$ n -vektörü olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n} \quad (2.60)$$

şeklinde olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin paralel taşınması durumunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin uzay veya denk afin uzay denir.

Eş afin uzayın konneksiyonu, (2.60) kullanılarak

$$\delta e_{i_1 \dots i_n} = 0 \text{ ya da } \nabla_k e_{i_1 \dots i_n} = 0 \quad (2.61)$$

şeklinde bulunur. Bu şart,

$$\partial_k e_{i_1 \dots i_n} - \Gamma_{k i_1}^s e_{s i_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma_{k i_n}^s e_{i_1 \dots s} = 0 \quad (2.62)$$

şeklinde de yazılabilir. (2.62) sisteminin bütün denklemleri n -vektörün antisimetrikliğine göre

$$\partial_k e_{12 \dots n} - \Gamma_{k1}^s e_{s2 \dots n} - \dots - \Gamma_{kn}^s e_{12 \dots s} = 0 \quad (2.63)$$

eşitliğine denk olur. $e_{12 \dots n} = e$ biçiminde yazılırsa (2.63) eşitliği kullanılarak

$$\Gamma_{ks}^s = \partial_k \ln e \quad (2.64)$$

ifadesi yazılabilir. Eş afin uzay bu şekildeki bir koşul ile de karakterize edilebilir. Eş afin konneksiyonun katsayıları ile verilen Γ_{ks}^s toplamı gradiyenti verir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu $\ln e$ olacaktır.

Ricci tensörü,

$$R_{ij} = R_{kij}^k = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^k \quad (2.65)$$

denklemleri ile verilir. Buradan eş afin konneksiyonun

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (2.66)$$

şartı ile de karakterize edilebileceği söylenebilir.

Eğrilik tensörünün burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzaylarda $R_{[rsk]}^i = 0$ ve

$R_{(rs)k}^i = 0$ şartlarını sağladığı hesaba katılarak

$$R_{rsk}^k = R_{rs} - R_{sr} \quad (2.67)$$

eşitliği yazılabilir. Son iki eşitlik, eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}^k = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceği anlamına gelir.

Tanım 2.5.4.2. Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın herhangi bir noktasındaki tanjant uzayında alınan g , (0,2) tipli simetrik tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması halinde korunuyorsa bu uzaya metrik uzay, (0,2) tipli simetrik g_{ij} tensörüne de metrik tensör adı verilir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.5.4.3. g metrik tensörü regülerlik şartını sağlıyor ise yani,

$$\det(g_{ij}) \neq 0$$

şartı sağlanıyor ise bu uzaya Weyl uzayı denir ve W_n şeklinde işaretlenir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.5.4.4. Weyl uzayının eş afin uzayı olması durumunda bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile işaretlenir (Hacısalıhoğlu 2003).

Riemannian uzayının burulması sıfırdır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu,

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (2.68)$$

denklemleri ile verilir ve Riemannian konneksiyonunun katsayıları da

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij}) \quad (2.69)$$

şeklinde verilir. Yani, g tensörünün Christoffel sembolleri ile Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları çakışır ve böyle katsayılarla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu denir. Ayrıca Riemannian manifoldu

üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ancak burulması sıfır olmayan konneksiyonlar da vardır. Böyle konneksiyonlara metrik konneksiyon denir.

$R_{jkl}^s g_{si} = R_{ijkl}$ eşitliği göz önüne alınırsa Riemannian uzayında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- i. $R_{(ij)kl} = 0$
- ii. $R_{[ijk]l} = 0$
- iii. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$
- iv. $R_{ij(kl)} = 0$
- v. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

2.5.5 Riemannian Manifolds

Tanım 2.5.5.1. Diferansiyellenebilir M manifoldundaki diferansiyellenebilir vektör alanların kümesi $\chi(M)$ olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

şeklinde tanımlı g bilineer formu $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

- a) $g(X, Y) = g(Y, X)$, (Simetrik)
- b) $g(X, X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (Pozitif Tanımlı)

şartları sağlanırsa g bilineer formuna metrik tensör veya Riemann metriği denir. Bu durumda (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir.

Lokal koordinatlarda ikinci şart $\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g bilineer formunun bileşenleri g_{ij} olmak üzere g Riemann metriği için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.5.5.2. M bir manifold, g de simetrik, regüler bilineer form olmak üzere eğer ∇ lineer konneksiyonu, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$1) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$2) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

şartlarını sağlarsa Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu adını alır.

M manifoldu üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

şeklinde verilen Kozsul eşitliği ile belirlenir (O'Neill 1983).

Teorem 2.5.5.1. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır (Hacısalıhoğlu 2003).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

3.1 Tanjant Demet

C^∞ sınıfından n boyutlu diferansiyellenebilir bir M_n manifoldunun bir P noktasındaki tanjant uzayı $T_P(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P(M_n) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan $T(M_n)$ cümlesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$ tanjant demetinin herhangi bir $P \in T_P(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tamamlayan

$$\begin{aligned} \pi : T(M_n) &\rightarrow M_n \\ P &\rightarrow \pi(P) = P \end{aligned}$$

demet izdüşümü ($P \rightarrow P$) karşılık getirir. $\pi^{-1}(P) = P \in T_P(M_n)$ şeklinde tanımlanan kümeye, M_n baz uzayının P noktasındaki fibre denir.

Doğal olarak M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \rightarrow T(M_n)$ ($\pi \circ f = I_{M_n}$, M_n de özdeşlik dönüşümü) kesiti bulunur. $T_P(M_n)$ tanjant uzayının sıfır vektörü, M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ değeridir. Bu $f : M_n \rightarrow T(M_n)$ kesiti veya $f(M_n)$ dönüşümünün görüntüsü, sıfır kesit olarak adlandırılır. $f(M_n)$, M_n baz uzayı ile aynı olduğu için M_n manifoldu, $T(M_n)$ tanjant demetinde diferansiyellenebilir imbedding olmuş veya içine daldırılmış altmanifolddur (Yano ve Ishihara 1973).

(x^h) , $U \subset M_n$ koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlar olsun. M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\pi^{-1}: U \subset M_n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü diferansiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde n -boyutlu vektör uzayıdır.

$P \in U$ noktası için $P \in T_p(M_n)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterilir. $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri, $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\} \left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h} \right)$ doğal bazına göre P noktasını $y^h = x^{\bar{h}}$, $\bar{h} = n+1, \dots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U koordinat komşuluğunda $\pi(P) = P$ 'nin koordinatları x^h , $h = 1, \dots, n$ ile gösterilirse, P noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \rightarrow P \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemi elde edilir. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ koordinat sistemi, (x^h) dan indirgenmiş $\pi^{-1}(U)$ da bulunan koordinatlar olarak ifade edilir (Yano ve Ishihara 1973).

M_n manifoldunda $\pi(P) = P$ noktasını kapsayan bir diğer koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğunda P noktasını içerir. P nin indirgenmiş koordinatları $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuna göre $(x^{h'}, y^{h'})$ ile gösterilir. Koordinatlar arasındaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x^h), \\ x^{\bar{h}'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h, \end{cases} \quad (3.2)$$

biçimindedir (Yano ve Ishihara 1973).

$x^{h'}(x^h)$, $P \in M_n$ noktasındaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h$, $x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ olarak alınırsa (3.2) denklemi,

$$x^{p'} = x^{p'}(x^p) \quad (3.3)$$

biçiminde yazılır. (3.2) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} \right) = \begin{pmatrix} A_h^{h'} & 0 \\ A_{h\varepsilon}^{h'} y^\varepsilon & A_h^{h'} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

olarak tanımlıdır. Burada $A_h^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h}$, $A_{h\varepsilon}^{h'} = \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^\varepsilon}$ eşitlikleri alınmıştır.

(3.2) dönüşümünün tersi,

$$\begin{cases} x^h = x^h(x^{h'}), \\ x^{\bar{h}} = \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'}, \end{cases} \quad (3.5)$$

veya

$$x^p = x^p(x^{p'}) \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. (3.5) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}} \right) = \begin{pmatrix} A_{h'}^h & 0 \\ A_{h'\varepsilon'}^h y^{\varepsilon'} & A_{h'}^h \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

ile verilir. (3.4) ile (3.7) matrisleri $T(M_n)$ tanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu ifade eder (Yano ve Ishihara 1973).

M_n manifoldundaki (r, s) tipli C^∞ sınıfından tüm tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_s^r(M_n)$ ve M_n üzerindeki tüm tensör alanlarının kümesi ise $\mathfrak{S}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{S}_s^r(T(M_n))$ ve tüm tensör alanlarının kümesi ise $\mathfrak{S}(T(M_n))$ ile gösterilir.

3.1.1 Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti

f , M_n manifoldunda bir fonksiyon ve $f : M_n \rightarrow R$, $\pi : T(M_n) \rightarrow M_n$ olmak üzere, ${}^v f = f \circ \pi$, ${}^v f : T(M_n) \rightarrow R$ şeklinde tanımlı ${}^v f$ fonksiyonuna $T(M_n)$ tanjant demetinde f fonksiyonunun dikey lifti denir. Burada $P \in \pi^{-1}(U)$ ve $P = (x^i, y^i) = (x^i, \dot{x}^i)$ olmak üzere,

$${}^v f(P) = {}^v f(x, y) = f \circ \pi(P) = f(P) = f(x) \quad (3.8)$$

olur. Buradan ${}^v f(P)$ değerinin fibre boyunca sabit ve $P = \pi^{-1}(P) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşit olduğunu söyleyebiliriz (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.2 Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti

$X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, M_n manifoldunda keyfi bir vektör alanı olmak üzere,

$${}^v X(\iota\omega) = {}^v(\omega(X)) \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanan ${}^v X$ vektör alanı, $T(M_n)$ tanjant demetinde X vektör alanının dikey lifti olarak adlandırılır.

X vektör alanının dikey lifti olan vX vektör alanının $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$${}^vX = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ile verilir (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.3 Tanjant Demette 1-Formun Dikey Lifti

$\omega \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde 1-form (kovektör alanı) olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$${}^v\omega = (\omega_h, 0) \quad (3.11)$$

şeklinde olan ${}^v\omega \in \mathfrak{I}_1^0(T(M_n))$ 1-formuna, ω nın dikey lifti denir (Yano ve Ishihara 1973).

Ayrıca her $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde (3.11) eşitliğinden 1-formun dikey lifti,

$${}^v(dx^h) = dx^h \quad (3.12)$$

şeklindedir. Burada (dx^h) 1-formdur (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.4 Tanjant Demette Tensör Alanlarının Dikey Lifti

(3.8), (3.9) ve (3.11) eşitlikleri ile tanımlanan dikey liftler; sırasıyla, sabit katsayılarla göre $\mathfrak{S}_0^0(M_n)$ nin $\mathfrak{S}_0^0(T(M_n))$ ye, $\mathfrak{S}_0^1(M_n)$ nin $\mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ ve $\mathfrak{S}_1^0(M_n)$ nin $\mathfrak{S}_1^0(T(M_n))$ ye lineer izomorfim olduğunu belirler. Böylece,

$${}^v(P \otimes Q) = {}^v P \otimes {}^v Q, \quad {}^v(P + R) = {}^v P + {}^v R \quad (3.13)$$

şartı ile sabit katsayılarla göre $\mathfrak{S}(M_n)$ tensör cebrinin $\mathfrak{S}(T(M_n))$ tensör cebrine bir tek cebirsel izomorfizm ile dikey liftlere genişletilebilir. Burada P, Q ve R , $\mathfrak{S}(M_n)$ nin keyfi elemanlarıdır. (3.13) eşitlikleri kullanılarak $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre, F_i^h lokal bileşenlerine sahip bir $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor alanının ${}^v F$ dikey lifti,

$${}^v F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

biçimindedir.

G_{ji} bileşenlerine sahip bir $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^v G$ dikey lifti,

$${}^v G = \begin{pmatrix} G_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

biçimindedir.

H^{ih} bileşenlerine sahip bir $H \in \mathfrak{S}_0^2(M_n)$ tensör alanının dikey lifti,

$${}^v H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ih} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Gerçekten, (3.8), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
 {}^v F &= {}^v (F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i) \\
 &= {}^v (F_i^h) {}^v \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \right) \otimes {}^v (dx^i) \\
 &= F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i
 \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.14) eşitliğini verir. Benzer olarak (3.15) ve (3.16) eşitlikleride gösterilebilir.

3.1.5 Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti

$T(M_n)$ tanjant demetinde $f \in \mathfrak{F}_0^0(M_n)$ olmak üzere

$$\iota(df) = y^s \partial_s f = \partial f = {}^c f$$

şeklindeir. Burada ${}^c f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.6 Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti

$X \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$, M_n manifoldunda bir vektör alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^c X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

şeklindeki bileşenlere sahip olan ${}^c X \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ vektör alanı X vektör alanının tam lifti olarak adlandırılır (Yano ve Ishihara 1973).

Her $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde (3.17) eşitliğinden

$${}^c(\partial_h) = \partial_h \quad (3.18)$$

denklemleri sağlanır (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.7 Tanjant Demette Tensör Alanlarının Tam Lifti

$${}^c(P \otimes Q) = {}^c P \otimes {}^v Q + {}^v P \otimes {}^c Q, \quad {}^c(P + R) = {}^c P + {}^c R \quad (3.19)$$

şartı ile sabit katsayılarla göre $\mathfrak{S}(M_n)$ tensör cebirinin $\mathfrak{S}(T(M_n))$ tensör cebrine bir tek cebirsel izomorfizm ile tam liftlere genişletilebilir. Burada P, Q ve R , $\mathfrak{S}(M_n)$ nin keyfi elemanlarıdır.

(3.19) eşitlikleri kullanılarak $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre;

F_i^h lokal bileşenlerine sahip bir $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor alanının ${}^c F$ tam lifti,

$${}^c F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

biçimindedir.

G_{ji} bileşenlerine sahip bir $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^c G$ tam lifti,

$${}^c G = \begin{pmatrix} \partial G_{ji} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

biçimindedir.

H^{ih} bileşenlerine sahip bir $H \in \mathfrak{Z}_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^c H$ tam lifti,

$${}^c H = \begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \\ H^{ih} & \partial H^{ih} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Gerçekten, (3.8), (3.9), (3.12) ve (3.18) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}^c F &= {}^c (F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i) \\ &= {}^c (F_i^h)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \right) \otimes^V (dx^i) + {}^c (F_i^h)^C \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \right) \otimes^V (dx^i) + {}^c (F_i^h)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \right) \otimes^C (dx^i) \\ &= {}^c (F_i^h) \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i + {}^c (F_i^h) \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + {}^c (F_i^h) \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^h \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.20) eşitliğini verir. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri de benzer olarak gösterilebilir.

3.1.8 γ - Operatörü

M_n manifoldu üzerinde F bir afinor alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma F \in \mathfrak{Z}_0^1(T(M_n))$ vektör alanı,

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s F_s^h \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

ile tanımlanır.

$T \in \mathfrak{S}_2^1(T(M_n))$ olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre $\gamma T \in \mathfrak{S}_1^1(T(M_n))$ afinor alanı,

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^s T_{s\ h}^h \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

ile tanımlanır (Yano ve Ishihara 1973).

3.1.9 Yatay Lift

Diferansiyellenebilir M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyon verilsin. Keyfi $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$${}^H X = {}^C X - (\nabla_\gamma X) \quad (3.25)$$

ile tanımlanan ${}^H X \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının $T(M_n)$ tanjant demete yatay lifti denir. Burada $(\nabla_\gamma X) = \gamma(\nabla X)$ şeklindedir (Yano ve Ishihara 1973).

X vektör alanının ${}^H X$ yatay liftinin, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

şeklindedir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^s \Gamma_{s\ i}^h \quad (3.27)$$

eşitliği geçerlidir.

$F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ afinor alanının $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti,

$${}^H F = {}^C F - (\nabla_\gamma F) \quad (3.28)$$

ile tanımlı olup $\nabla_\gamma F$,

$$(\nabla_\gamma F) = y^s \nabla_s F_i^h \partial_{\bar{i}} \otimes dx^h \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlıdır. F afinor alanının ${}^H F$ yatay liftinin $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_s^h F_i^s + \Gamma_i^s F_s^h & F_i^h \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğu sonucu çıkar.

Benzer olarak; $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^H G$ yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H G = \begin{pmatrix} \Gamma_j^t G_{ti} + \Gamma_i^t G_{jt} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

bileşenlerine sahiptir. Aynı şekilde $H \in \mathfrak{S}_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^H H$ yatay liftinin $T(M_n)$ tanjant demetteki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H H = \begin{pmatrix} 0 & H^{ji} \\ H^{ji} & -\Gamma_t^j H^{ti} - \Gamma_t^i H^{jt} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğu söylenebilir (Yano ve Ishihara 1973).

3.2 Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Tam Liftleri

M_n , ∇ afin konneksiyonu ile verilen bir manifold olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde bir tek ${}^c\nabla$ afin konneksiyonu vardır ve her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için

$${}^c\nabla_{{}^cX} {}^cY = {}^c(\nabla_X Y) \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır. Γ_{ji}^h , M_n de (x^h) lokal koordinatlarına göre ∇ nın bileşenleri ve Γ_{CB}^A , $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre ${}^c\nabla$ nin bileşenleri olsun. X ve Y , M_n deki (x^h) lokal koordinatlarına göre X^h ve Y^h bileşenlerine sahip keyfi vektör alanları olsun. O zaman cX ve cY , $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre;

$${}^cX : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ X^{\bar{h}} \end{pmatrix}, \quad {}^cY : \begin{pmatrix} Y^h \\ \partial Y^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^h \\ Y^{\bar{h}} \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahip olur. Bu bileşenler kullanılarak (3.33) eşitliği, aşağıdaki formlarda da yazılabilir.

$$X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^h Y^i + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^{\bar{i}}) + X^{\bar{j}} (\partial_{\bar{j}} Y^h + \Gamma_{\bar{j}i}^h Y^i + \Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} Y^{\bar{i}}) = X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^h Y^i)$$

ve

$$X^j (\partial_j Y^{\bar{h}} + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^i + \Gamma_{ji}^h Y^{\bar{i}}) + X^{\bar{j}} (\partial_{\bar{j}} Y^{\bar{h}} + \Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} Y^i + \Gamma_{\bar{j}i}^h Y^{\bar{i}}) = y^k \partial_k \{X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^h Y^i)\}.$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ji}^h &= \Gamma_{ji}^h, & \Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= 0, & \Gamma_{ji}^h &= 0, & \Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= 0, \\
\Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= \partial \Gamma_{ji}^h, & \Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= \Gamma_{ji}^h, & \Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= \Gamma_{ji}^h, & \Gamma_{ji}^{\bar{h}} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde konneksiyon katsayıları elde edilir. (3.34) ile tanımlanan Γ_{CB}^A nin global olarak $T(M_n)$ de bir afin konneksiyon belirlediği (3.4) ve (3.7)'den kolaylıkla doğrulanabilir. Bu afin konneksiyon $T(M_n)$ de ∇ afin konneksiyonunun tam lifti olarak adlandırılır ve ${}^C\nabla$ ile gösterilir (Yano ve Ishihara 1973).

Teorem 3.2.1. T ve R , sırasıyla, ∇ konneksiyonunun burulma ve eğrilik tensörleri olmak üzere CT ve CR , sırasıyla, ${}^C\nabla$ nin burulma ve eğrilik tensörleridir (Yano ve Kabayashi 1966).

İspat: $\forall X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned}
{}^CT({}^CX, {}^CY) &= {}^C(T(X, Y)) \\
&= {}^C(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&= {}^C\nabla_{{}^CX} {}^CY - {}^C\nabla_{{}^CY} {}^CX - [{}^CX, {}^CY]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
{}^CR({}^CX, {}^CY){}^CZ &= {}^C(R(X, Y)Z) \\
&= {}^C(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= {}^C\nabla_{{}^CX} {}^C\nabla_{{}^CY} {}^CZ - {}^C\nabla_{{}^CY} {}^C\nabla_{{}^CX} {}^CZ - {}^C\nabla_{[{}^CX, {}^CY]} {}^CZ
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ${}^C T$ ve ${}^C R$ nin bileşenlerini bulalım. T nin T_{ji}^h ve R nin R_{kji}^h bileşenleri, sırasıyla,

$$T_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ij}^h,$$

$$R_{kji}^h = \partial_k \Gamma_{ji}^h - \partial_j \Gamma_{ki}^h + \Gamma_{kt}^h \Gamma_{ji}^t - \Gamma_{jt}^h \Gamma_{ki}^t$$

olmak üzere $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre ${}^C T$ nin T_{CB}^A bileşenleri

$$T_{ji}^h = T_{ji}^h, T_{ji}^{\bar{h}} = \partial T_{ji}^h, T_{ji}^{\bar{h}} = T_{ji}^h, T_{ji}^{\bar{h}} = T_{ji}^h \quad (3.35)$$

olup diğerleri sıfır olarak bulunur. ${}^C R$ nin R_{DCB}^A bileşenleri de

$$R_{kji}^h = R_{kji}^h, R_{kji}^{\bar{h}} = \partial R_{kji}^h, R_{kji}^{\bar{h}} = R_{kji}^h, R_{kji}^{\bar{h}} = R_{kji}^h, R_{kji}^{\bar{h}} = R_{kji}^h \quad (3.36)$$

olup diğerleri sıfır olarak bulunur.

$\forall f \in \mathfrak{S}_0^0(T(M_n))$ ve $\forall X \in \mathfrak{S}_0^1(T(M_n))$ için ${}^C \nabla_X f = X f$ olduğundan Teorem 3.2.2 yazılabilir.

Teorem 3.2.2. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

- i. ${}^C \nabla_{v_X}^v f = 0$
- ii. ${}^C \nabla_{v_X}^c f = {}^v (\nabla_X f)$
- iii. ${}^C \nabla_{c_X}^v f = {}^v (\nabla_X f)$
- iv. ${}^C \nabla_{c_X}^c f = {}^c (\nabla_X f)$

eşitlikleri geçerlidir (Yano ve Ishihara 1973).

İspat: $\nabla_X f = Xf$ ve $X^m \nabla_m f = X^m \partial_m f = Xf$ denklemlerinden yararlanarak,

i. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C \nabla_{\nabla_X} {}^V f &= {}^V X^M {}^C \nabla_M {}^V f \\ &= {}^V X^m {}^C \nabla_m {}^V f + {}^V X^{\bar{m}} {}^C \nabla_{\bar{m}} {}^V f \\ &= {}^V \underset{0}{X^m} \partial_m f + {}^V \underset{0}{X^{\bar{m}}} \partial_{\bar{m}} f \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C \nabla_{\nabla_X} {}^C f &= {}^V X^M {}^C \nabla_M {}^C f \\ &= {}^V X^m {}^C \nabla_m {}^C f + {}^V X^{\bar{m}} {}^C \nabla_{\bar{m}} {}^C f \\ &= {}^V \underset{0}{X^m} \partial_m (y^s \partial_s f) + {}^V X^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}} (y^s \partial_s f) \\ &= X^m \partial_{\bar{m}} (y^s \partial_s f) \\ &= X^m \delta_m^s \partial_s f \\ &= X^s \partial_s f \\ &= {}^V (Xf) \\ &= {}^V (\nabla_X f) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C \nabla_{\nabla_X} {}^V f &= {}^C X({}^V f) \\ &= {}^C X^M \partial_M {}^V f \\ &= {}^C X^m \partial_m {}^V f + {}^C \underset{0}{X^{\bar{m}}} \partial_{\bar{m}} {}^V f \\ &= X^m \partial_m f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^m \partial_m f \\
&=^V (Xf) \\
&=^V (\nabla_X f)
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}^C \nabla_{c_X} {}^C f &= {}^C X^M \partial_M {}^C f \\
&= {}^C X^m \partial_m {}^C f + {}^C X^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}} {}^C f \\
&= X^m \partial_m (y^s \partial_s f) + (y^s \partial_s X^m) \partial_{\bar{m}} (y^\ell \partial_\ell f) \\
&= y^s X^m \partial_m \partial_s f + (y^s \partial_s X^m) \delta_m^\ell \partial_\ell f \\
&= y^s X^m \partial_s \partial_m f + (y^s \partial_s X^m) \partial_m f \\
&= y^s \partial_s (X^m \partial_m f) \\
&= {}^C (Xf) \\
&= {}^C (\nabla_X f)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. Her $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için

- i. ${}^C \nabla_{v_X} {}^V Y = 0$ (3.38)
- ii. ${}^C \nabla_{c_X} {}^V Y =^V (\nabla_X Y)$

eşitlikleri geçerlidir (Yano ve Ishihara 1973).

İspat: X^h ve Y^h , sırasıyla, M de verilen (x^h) lokal koordinatlarına göre X ve Y nin bileşenleri olsun. X ve Y nin $T(M)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenleri,

$${}^v X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^h \end{pmatrix}, \quad {}^v Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y^h \end{pmatrix}, \quad {}^c X = \begin{pmatrix} x^h \\ \partial x^h \end{pmatrix}, \quad {}^c Y = \begin{pmatrix} y^h \\ \partial y^h \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

i.

${}^c \nabla_{{}^v X} {}^v Y$ nin ilk n bileşeni

$$X^j (\Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^i) = 0$$

ve son n bileşeni (3.34) eşitliklerinden

$$X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^i) = 0$$

şeklinde olup ${}^c \nabla_{{}^v X} {}^v Y = 0$ olarak bulunur.

ii.

${}^c \nabla_{{}^v X} {}^c Y$ nin ilk n bileşeni

$$X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^i + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} \partial Y^i) = 0$$

ve son n bileşeni (3.34) eşitliklerinden

$$X^j (\partial_j \partial Y^h + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} \partial Y^i + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} \partial Y^i) = X^j (\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{\bar{h}} Y^i)$$

şeklinde olup, ${}^c \nabla_{{}^c X} {}^v Y = {}^v (\nabla_{{}^v X} Y)$ eşitliği elde edilir.

3.3 Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Lie Türevi ve İnfinitesimal Afin Dönüşümler

M manifoldunda bir X vektör alanı ve ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. X vektör alanına göre ∇ konneksiyonunun Lie türevi $L_X \nabla$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlı olup $\mathfrak{S}_2^1(M)$ nin bir elemanıdır.

Teorem 3.3.1. ∇ , M manifoldunda bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için

i. $L_{v_X} {}^C \nabla = {}^V (L_X \nabla)$

ii. $L_{c_X} {}^C \nabla = {}^C (L_X \nabla)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

i. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned} (L_{v_X} {}^C \nabla)({}^C Y, {}^C Z) &= L_{v_X} ({}^C \nabla_{c_Y} {}^C Z) - {}^C \nabla_{c_Y} (L_{v_X} {}^C Z) - {}^C \nabla_{[v_X, c_Y]} {}^C Z \\ &= L_{v_X} {}^C (\nabla_Y Z) - {}^C \nabla_{c_Y} {}^V (L_X Z) - {}^C \nabla_{v_{[X, Y]}} {}^C Z \\ &= {}^V (L_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= {}^V ((L_X \nabla)(Y, Z)) \\ &= {}^V (L_X \nabla)({}^C Y, {}^C Z) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned}
(L_{c_X} {}^c \nabla)({}^c Y, {}^c Z) &= L_{c_X} ({}^c \nabla_{c_Y} {}^c Z) - {}^c \nabla_{c_Y} (L_{c_X} {}^c Z) - {}^c \nabla_{[c_X, c_Y]} {}^c Z \\
&= L_{c_X} {}^c (\nabla_Y Z) - {}^c \nabla_{c_Y} (L_X Z) - {}^c \nabla_{c_{[X, Y]}} {}^c Z \\
&= {}^c (L_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= {}^c ((L_X \nabla)(Y, Z)) \\
&= {}^c (L_X \nabla)({}^c Y, {}^c Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

∇ afin konneksiyonlu bir manifoldda eğer $L_X \nabla = 0$ ise X^α bileşenleri ile verilen X vektör alanı infinitesimal afin dönüşüm olarak adlandırılır. $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ bileşenleri açısından X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_\gamma \partial_\beta X^\alpha + X^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha - \Gamma_{\lambda\beta}^\lambda \partial_\lambda X^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \partial_\gamma X^\lambda + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha \partial_\beta X^\lambda = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada X^α lar X in lokal bileşenleridir.

M manifoldunda Γ_{ji}^k konneksiyon katsayılarına sahip bir ∇ konneksiyonu ve $T(M)$

tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre $\begin{pmatrix} X^h \\ X^h \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir X

vektör alanı verilmiş olsun. (3.34)'deki konneksiyon katsayıları kullanılarak, X vektör alanının ${}^c \nabla$ ile $T(M)$ tanjant demetinde bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu aşağıdaki eşitliklerden kolaylıkla görülür.

$$\text{i. } \partial_j \partial_i X^h + X^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - (\Gamma_{ji}^k \partial_k X^h + \partial_j \Gamma_{ji}^k \partial_k X^h) + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^k = 0$$

$$\text{ii. } \partial_j \partial_i X^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k X^h + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^k = 0$$

$$\text{iii. } \partial_j \partial_i X^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k X^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^k = 0$$

$$\text{iv. } \partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} X^h = 0$$

$$\begin{aligned} \text{v. } \partial_j \partial_i X^{\bar{h}} + (X^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}^h + X^{\bar{k}} \partial_k \Gamma_{ji}^h) - (\Gamma_{ji}^k \partial_k X^{\bar{h}} + \partial \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} X^{\bar{h}}) \\ + (\partial \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}}) + (\partial \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}} + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{vi. } \partial_j \partial_i X^{\bar{h}} + X^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^h \partial_{\bar{k}} X^{\bar{k}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}} + (\partial \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}} + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}}) = 0$$

$$\text{vii. } \partial_j \partial_i X^{\bar{h}} + X^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^h \partial_{\bar{k}} X^{\bar{k}} + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}} + (\partial \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}}) = 0$$

$$\text{viii. } \partial_j \partial_i X^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j X^{\bar{k}} + \Gamma_{jk}^h \partial_i X^{\bar{k}} = 0$$

3.4 Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Yatay Liftleri

M manifoldunda bir ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Yatay liftin (3.25) tanımı göz önüne alınırsa (3.38) eşitliklerinden, $\forall X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ için

- i. ${}^C \nabla_{H_X} H Y = {}^H (\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$
- ii. ${}^C \nabla_{C_X} H Y = {}^H (\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$
- iii. ${}^C \nabla_{H_X} C Y = {}^C (\nabla_X Y) - \gamma((\nabla Y)(\nabla X))$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $R(\cdot, X)Y$, M de (1,1) tipli bir W tensör alanı olmak üzere her $Z \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ için $w(Z) = R(Z, X)Y$ olup R, ∇ nın eğrilik tensörüdür.

Ayrıca $\forall X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ için

- i. ${}^C \nabla_{V_X} H Y = 0$
- ii. ${}^C \nabla_{H_X} V Y = {}^V (\nabla_X Y)$

eşitlikleri de sağlanır.

3.5 Yarı-Tanjant Demet

M_n ve B_m diferansiyellenebilir manifoldları, sırasıyla, n ve m boyutlu C^∞ sınıfından manifoldlar ve (M_n, π_1, B_m) ,

$$\pi_1: M_n \rightarrow B_m$$

submersionu ile tanımlanan diferansiyellenebilir bir demet olmak üzere bu demette kullanılan indisler $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$; $a, b, \dots = 1, \dots, n-m$; $\alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n$ olacak şekilde $(x^a, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemini inceleyelim. Burada x^α koordinatları B_m baz manifoldunun lokal koordinatları, x^a ise, keyfi $\pi_1: M_n \rightarrow B_m$ demetinin fibre koordinatlarıdır. $(x^{a'}, x^{\alpha'})$ bu demetteki bir diğer lokal koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), \end{cases} \quad (3.40)$$

dönüşümü yazılır. Bu dönüşüme karşılık gelen jakobi matrisi,

$$(A_j^{i'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

ile tanımlıdır.

$T_x(B_m)$, B_m baz manifoldunun $(x = \pi_1(x), x = (x^a, x^\alpha) \in M_n)$ şeklinde tanımlı bir x noktasındaki tanjant uzayı olsun. X vektör alanının bileşenleri, $T_x(B_m)$ tanjant uzayındaki $\{\partial_\alpha\}$ doğal çatısına göre, $X^\alpha = dx^\alpha(X)$ olmak üzere, M_n manifoldu

üzerinde koordinatları $(x^I) = (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ olarak verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti elde edilir. Burada $(x^\alpha = y^\alpha, \bar{\alpha} = \alpha + m, I = 1, \dots, n + m)$ olarak alınmıştır (Duc 1979; Vishnevskii vd., 1985).

B_m manifoldunda doğal demet yapısına ve $\pi: (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi: t(B_m) \rightarrow B_m$ izdüşümüne sahip olan $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin, eğer $\pi_2: (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^a, x^\alpha)$ koordinatları ile $\pi_2: t(B_m) \rightarrow M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa, o zaman M_n manifoldunda da bir demet yapısına sahip olduğu söylenebilir. Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Ayrıca $(t(B_m), \pi_1 \circ \pi_2)$ yarı-tanjant demeti karma demet Poor (1981) ya da step-like demeti belirtir (Ostianu 1974).

M_n nin lokal koordinatlarının (3.40) deki dönüşüme göre, $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde belirttiği koordinat dönüşümü,

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), \\ x^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} x^{\bar{\beta}}, \end{cases} \quad (3.41)$$

şeklinde olup bu koordinat dönüşümüne karşılık gelen jakobi matrisi,

$$\bar{A} = A_J^{I'} = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{\alpha'} y^\alpha & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

ile tanımlıdır. Burada $I = (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha), J = (x^b, x^\beta, \bar{x}^\beta), I, J, \dots = 1, \dots, 2n; A_{\beta\varepsilon}^{a'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}$ şeklindedir (Salimov ve Kadioğlu 2000).

(3.42) de belirtilen blok matrisinin asal köşegeni üzerinde yer alan her matris için

$$Det(A_b^{a'}) \neq 0, \quad Det(A_\beta^{\alpha'}) \neq 0$$

eşitlikleri geçerli olduğundan $Det \bar{A} \neq 0$ olur. (3.41) verilen dönüşümünün tersi

$$\begin{cases} x^a = x^a(x^{b'}, x^{\beta'}), \\ x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta'}), \\ \bar{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} y^{\beta'}, \end{cases} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlı olup (3.43) dönüşümüne karşılık gelen Jakobi matrisi

$$(A_{J'}^I) = \begin{pmatrix} A_b^a & A_{\beta'}^a & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta'\varepsilon'}^\alpha y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^\alpha \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

şeklindedir.

Yarı-tanjant demette boyut $\dim t(B_m) = n + m$ olarak verilir (Duc 1979; Vishnevskii vd., 1985). Ayrıca özel olarak $n = m$ alınırsa $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, $T(M_n)$ tanjant demetine dönüşür (Salimov ve Kadioğlu 2000).

$F(B_m)$, B_m manifoldundaki C^∞ sınıfından gerçel değerli fonksiyonların modülü olmak üzere, B_m manifoldundaki (p, q) tipli tüm tensör alanlarının $F(B_m)$ üzerindeki modülü $\mathfrak{S}(B_m) = \sum_{p,q=0}^\infty \mathfrak{S}_q^p(B_m)$ olarak gösterilir. Benzer şekilde, $F(M_n)$, M_n manifoldundaki

C^∞ sınıfından gerçel değerli fonksiyonların modülü olmak üzere, M_n manifoldundaki (p, q) tipli tüm tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\mathfrak{F}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{F}_q^p(M_n)$ olarak gösterilir.

3.5.1 Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Dikey Lifti

ω , ω_α lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ şeklinde olan B_m üzerindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun, indirgenmiş koordinatlara göre dikey lifti,

$${}^v\omega = (0, \omega_\alpha, 0) \quad (3.45)$$

ile tanımlanır. Burada (3.42) eşitliğinden, $({}^v\omega) = \bar{A}({}^v\omega')$ olup elde edilen bu kovektör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde ω , 1-formunun dikey lifti denir ve ${}^v\omega$ ile gösterilir (Vishnevskii vd., 1985).

Teorem 3.5.1.1. $\omega, \theta \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$ olmak üzere

$${}^v(\omega + \theta) = {}^v\omega + {}^v\theta$$

eşitliği geçerlidir (Ay 2013).

İspat: $\omega, \theta \in \mathfrak{F}_1^0(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^v(\omega + \theta) &= (0, \omega_\alpha + \theta_\alpha, 0) \\ &= (0, \omega_\alpha, 0) + (0, \theta_\alpha, 0) \\ &= {}^v\omega + {}^v\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5.2 Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Tam Lifti

ω , koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ ile tanımlı B_m üzerinde 1-form olmak üzere ω 1-formunun tam lifti,

$${}^{cc}\omega = (0, y^\sigma \partial_\sigma \omega_\alpha, \omega_\alpha) \quad (3.46)$$

ile tanımlanır. Burada (3.42) eşitliğinden, $({}^{cc}\omega) = \bar{A}({}^{cc}\omega')$ olup elde edilen bu kovektör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde ω 1-formunun tam lifti denir ve ${}^{cc}\omega$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.2.1. $\omega, \theta \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$ olmak üzere

$${}^{cc}(\omega + \theta) = {}^{cc}\omega + {}^{cc}\theta$$

eşitliği geçerlidir (Ay 2013).

İspat: $\omega, \theta \in \mathfrak{T}_1^0(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^{cc}(\omega + \theta) &= (0, y^\sigma \partial_\sigma (\omega_\alpha + \theta_\alpha), \omega_\alpha + \theta_\alpha) \\ &= (0, y^\sigma \partial_\sigma \omega_\alpha, \omega_\alpha) + (0, y^\sigma \partial_\sigma \theta_\alpha, \theta_\alpha) \\ &= {}^{cc}\omega + {}^{cc}\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Tanjant Demetin Pull-Back Demeti

Bu bölümde yarı-tanjant ve pull-back demeti tanımlanarak, yarı-tanjant demetin bir pull-back demeti olduğu belirtilmiştir. Ayrıca, güzel kare dönüşümünün tanımı yapılarak, yarı-tanjant demetin güzel kare dönüşümüne somut bir örnek olduğu gösterilmektedir.

$T_x(B_m)$ ($x = \pi_1(\tilde{x}), \tilde{x} = (x^a, x^\alpha) \in M_n$), x noktasındaki tanjant uzayı ve $T(B_m)$ tanjant demetinin fibre koordinatları $\bar{x}^\alpha = y^\alpha$ olmak üzere $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, 2n)$ kabul edilir. M_n manifoldunda $(x^I) = (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$, $(\bar{x}^\alpha = y^\alpha, \bar{\alpha} = \alpha + m, I = 1, \dots, n+m)$ şeklinde lokal koordinatlara sahip $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti elde edilir.

$t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, B_m üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi : (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$ izdüşüm dönüşümüne sahiptir. Eğer $\pi_2 : (x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) \rightarrow (x^a, x^\alpha)$ ile, $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa; $t(B_m)$, M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur. Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Ayrıca $(t(B_m), \pi_1 \circ \pi_2)$ yarı-tanjant demeti karma demet (Poor 1981) ya da step-like demeti belirtir (Ostianu 1974).

$f : B' \rightarrow B$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\pi : E \rightarrow B$ fibre demeti olsun. İndirgenmiş demet veya Whitney çarpımı olarak da bilinen pull-back demeti

$$f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = \pi(e)\} \subset B' \times E$$

total uzayı ile verilir (Steenrod 1951; Lawson ve Michelsohn 1989; Husemoller 1994). Pull-back demetinde $\pi': f^*E \rightarrow B'$ izdüşümü ilk değişken olan (b', e) üzerine izdüşüm şeklindedir, yani $\pi'(b', e) = b'$ eşitliği bulunur. Pull-back demet veya Whitney çarpımının daha yüksek mertebeden durumlara genellemeleri “Pontryagin demetleri” olarak bilinir (Pontryagin 1962). Pull-back demetin ve $(t(B_m), \pi_2)$ yarı-tanjant demetin yukarıda yer alan tanımlarından; yarı-tanjant demetin, B_m manifoldu üzerinde tanımlı tanjant demetin π_1 izdüşüm dönüşümü yardımıyla oluşturulmuş bir pull-back demeti olduğu sonucuna varılır (Salimov ve Kadioğlu 2000).

Eğer,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir diagram aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu dönüşüm güzel kare (good square) belirtir:

- i. α ve β fibre demetlerdir (vektör demetleri olması gerekmez),
- ii. γ ve π vektör demetleridir,
- iii. Dönüşümler arasında $\pi \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ eşitliği geçerlidir,
- iv. Lokal koordinatlarla ifadesi ise

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\gamma} & B & U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \rightarrow & U^n \times G^s & (x^i, a^a, g^\lambda, b^\sigma) \rightarrow (x^i, g^\lambda) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\pi} & D & U^n \times R^r & \rightarrow & U^n & (x^i, a^a) \rightarrow (x^i) \end{array}$$

şeklindedir. Burada G bir manifold belirtmektedir (Etayo 1991).

Yukarıdaki tanımdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1.1. $\pi:t(B_m) \rightarrow B_m$ yarı-tanjant demet ve $\pi_1:M_n \rightarrow B_m$ keyfi bir fibre demet olmak üzere aşağıdaki diagram güzel kare belirtir:

$$\begin{array}{ccccc}
 t(B_m) & \xrightarrow{\pi_2} & M_n & & M_n \times T_x(B_m) & \xrightarrow{\pi_2} & M_n & & (x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) & \xrightarrow{\pi_2} & (x^a, x^\alpha) \\
 id \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & id \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & id \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 t(B_m) & \xrightarrow{\pi} & B_m & & M_n \times T_x(B_m) & \xrightarrow{\pi} & B_m & & (x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) & \xrightarrow{\pi} & (x^\alpha)
 \end{array}$$

Yarı-tanjant demetlerde lineer konneksiyonlar ve onların bazı özellikleri (Eğrilik, burulma tensörleri ile lie türevleri) Vishnevskii (2002) ve Vishnevskii vd., (1985) de çalışılmıştır. Bu çalışmada ise, (Vishnevskii 2002) tarafından daha önce başlatılan B_m baz manifoldundan $(t(B_m), \pi_2)$ yarı-tanjant (pull-back) demetine izdüşümlü lineer konneksiyonun tam liftleri araştırılacaktır.

4.2 İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Liftleri

Bu bölümde daha önce Vishnevskii tarafından başlatılan yarı-tanjant (pull-back) demete izdüşümlü lineer konneksiyonların tam liftleri ile ilgili katsayılar hesaplanarak, çeşitli lift problemleri ele alınmaktadır.

f , B_m üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerinde, f fonksiyonunun dikey lifti, ${}^v f = f \circ \pi_1$ ve $\pi:t(B_m) \rightarrow B_m$ dönüşümleri kullanılarak

$${}^{vv} f = {}^v f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$${}^{vv} f(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) = f(x^\alpha) \quad (4.1)$$

bulunur. Böylece ${}^{vv} f$ dikey liftinin $\pi:t(B_m) \rightarrow B_m$ izdüşümünün her bir fibresi boyunca sabit olduğu söylenebilir (Ay 2013).

M_n manifoldunda tanımlı $f = f(x^a, x^\alpha)$ fonksiyonunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine ${}^{cc}f$ tam lifti,

$${}^{cc}f = \iota(df) = x^{\bar{\beta}} \partial_{\beta} f = y^{\beta} \partial_{\beta} f \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlıdır (Salimov ve Kadioğlu 2000).

$X = X^\alpha \partial_\alpha$ bileşenleri ile verilen $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti,

$${}^{vv}X = ({}^{vv}X^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

bileşenlerine sahiptir. Burada (3.42) ve (4.3) eşitliklerinden ${}^{vv}X' = \bar{A}({}^{vv}X)$ elde edilir (Ay 2013).

Keyfi $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ afinoru için (3.42) matrisinden $\gamma F' = \bar{A}(\gamma F)$ eşitliği sağlanır. Burada γF , indirgenmiş koordinat sisteminde

$$\gamma F = (\gamma F)^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup bir vektör alanı belirtir.

$X = X^a(x^a, x^\alpha) \partial_a + X^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$ ile tanımlı bir $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti,

$${}^{cc}X = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bileşenlerine sahip vektör alanı belirtir (Vishnevskii 2002). Burada $X = X^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$ şeklinde tanımlı bir vektör alanıdır. (3.42) ve (4.5) eşitliklerinden $({}^{cc}X) = \bar{A}({}^{cc}X)$ elde edilir (Vishnevskii 2002; Vishnevskii vd., 1985).

Teorem 4.2.1. $X \in \mathfrak{S}_1^o(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları olsun. Lie parantezi için

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y], (L_{{}^{cc}X} {}^{cc}Y = {}^{cc}(L_X Y))$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^b \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^\beta \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-

tanjant demette tanımlı $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^J$ nin bileşenleri olmak üzere $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^J - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

eşitliği yazılabilir. Burada (4.5) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^b &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^b - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^b \\ &= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^b}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^b + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^b}_0 \\ &\quad - ({}^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^b}_0 - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^b}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^b - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^b - Y^\alpha \partial_\alpha X^b \\
&= [X, Y]^b
\end{aligned}$$

olur. $J = \beta$ için, (4.5)'den

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^\beta &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^\beta - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^\beta \\
&= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^\beta}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^\beta + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^\beta}_0 \\
&\quad - ({}^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^\beta}_0 - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^\beta - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^\beta}_0 \\
&= ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^\beta - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^\beta \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta \\
&= [X, Y]^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $J = \bar{\beta}$ için, (4.5)'den

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}}}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} \\
&\quad - ({}^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 - ({}^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\
&= X^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\beta) + y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^\sigma}_{\delta_\alpha^\sigma} \partial_\sigma Y^\beta \\
&\quad - Y^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta) - y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^\sigma}_{\delta_\alpha^\sigma} \partial_\sigma X^\beta \\
&= y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha \partial_\varepsilon Y^\beta + y^\varepsilon (\partial_\varepsilon X^\sigma) (\partial_\sigma Y^\beta) \\
&\quad - y^\varepsilon Y^\alpha \partial_\alpha \partial_\varepsilon X^\beta - y^\varepsilon (\partial_\varepsilon Y^\sigma) (\partial_\sigma X^\beta) \\
&= y^\varepsilon \partial_\varepsilon [X, Y]^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. ${}^{cc}[X, Y]$ nin $t(B_m)$ deki $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$${}^{cc}[X, Y] = \begin{pmatrix} [X, Y]^b \\ [X, Y]^\beta \\ \gamma^\varepsilon \partial_\varepsilon [X, Y]^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y]$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.2. $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ve keyfi $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ için

$$[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F)$$

eşitliği geçerlidir. Burada L_X , X e göre Lie türev operatörüdür.

İspat: Keyfi $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ve $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ için $(x^b, x^\beta, \bar{x}^{\bar{\beta}})$

koordinatlarına göre $t(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X, \gamma F]^J$ in bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X, \gamma F]^b \\ [{}^{cc}X, \gamma F]^\beta \\ [{}^{cc}X, \gamma F]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$ olmak

üzere

$$[{}^{cc}X, \gamma F]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^J - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

eşitliği yazılır. Burada (4.4) ve (4.5) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, \gamma F]^b &= ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^b - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^b \\ &= \underbrace{({}^{cc}X)^a \partial_a (\gamma F)^b}_0 + \underbrace{({}^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (\gamma F)^b}_0 + \underbrace{({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^b}_0 \\ &\quad - \underbrace{(\gamma F)^a \partial_a ({}^{cc}X)^b}_0 - \underbrace{(\gamma F)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b}_0 - \underbrace{(\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^b}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $J = \beta$ için, (4.4) ve (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, \gamma F]^\beta &= ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^\beta - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^\beta \\
&= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a (\gamma F)^\beta}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \underbrace{\partial_\alpha (\gamma F)^\beta}_0 + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^\beta}_0 \\
&\quad - (\gamma F)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^\beta}_0 - \underbrace{(\gamma F)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^\beta}_0 - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^\beta}_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, $J = \bar{\beta}$ için (4.4) ve (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, \gamma F]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^{\bar{\beta}} - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 + ({}^{cc}X)^\alpha \underbrace{\partial_\alpha (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} \gamma^\varepsilon F_\varepsilon^\beta}_{\delta_\alpha^\varepsilon} \\
&\quad - (\gamma F)^a \underbrace{\partial_a ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 - \underbrace{(\gamma F)^\alpha \partial_\alpha ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 - \underbrace{(\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_{y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_{y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta} \\
&= X^\alpha \partial_\alpha \gamma^\varepsilon F_\varepsilon^\beta + y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha F_\alpha^\beta - y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} \gamma^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta}_{\delta_\alpha^\varepsilon} \\
&= X^\alpha \partial_\alpha \gamma^\varepsilon F_\varepsilon^\beta + y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha F_\alpha^\beta - y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \partial_\alpha X^\beta \\
&= y^\varepsilon (X^\alpha \partial_\alpha F_\varepsilon^\beta - \partial_\alpha X^\beta F_\varepsilon^\alpha + \partial_\varepsilon X^\alpha F_\alpha^\beta) \\
&= y^\varepsilon (L_X F)_\varepsilon^\beta
\end{aligned}$$

bulunur. $\gamma(L_X F)$ nin $t(B_m)$ deki $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$\gamma(L_X F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon (L_X F)_\varepsilon^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

$p: Y \rightarrow M$ fibrel manifold olmak üzere eğer M üzerindeki klasik lineer konneksiyon ∇ ye p –ilişkili olan Y üzerinde tanımlı ∇ klasik konneksiyonu varsa, ∇ konneksiyonuna p ye göre izdüşümlü konneksiyon denir (Włodzimierz ve Tomáš

2009; Bednarska 2013). B_m baz manifoldu üzerinde tanımlı $T(B_m)$ tanjant demetinde, ∇ konneksiyonu B_m üzerindeki klasik lineer konneksiyonu tanımlar (Mikulski 2007).

$X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ vektör alanları için $Tp \circ X = X \circ p$ ve $Tp \circ Y = Y \circ p$ olmak üzere

$$Tp \circ \nabla_X Y = (\nabla_X Y) \circ p$$

eşitliği bulunmaktadır. Keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

olmaktadır. Yukarıdaki tanımdan ∇ , $(p := \pi_1 : M_n \rightarrow B_m)$ B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon belirtir.

$t(B_m)$ yarı-tanjant demette keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$${}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc}Y = {}^{cc}(\nabla_X Y) \quad (4.6)$$

eşitliğini sağlayan ${}^{cc}\nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonu bulunabilir (Vishnevskii 2002; Vishnevskii vd., 1985). Burada (3.42) eşitliğini sağlayan konneksiyon katsayıları lokal koordinatlar yardımıyla hesaplanabilir. $\Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta}$ lar B_m baz manifoldundaki (x^{α}) lokal koordinatlarına göre ∇ konneksiyonun katsayılarını ve ${}^{cc}\Gamma_{I K}^J$ lar ise $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^a, x^{\alpha}, \bar{x}^{\bar{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre ${}^{cc}\nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonun katsayılarını belirtmektedir.

M_n üzerindeki (x^a, x^α) lokal koordinatlarına göre, sırasıyla, X^I ve Y^J bileşenlerine sahip $X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanlarının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine ${}^{cc}X$ ve ${}^{cc}Y$ tam liftleri $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^{cc}X: \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, {}^{cc}Y: \begin{pmatrix} Y^a \\ Y^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\alpha \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, \bar{x}^\beta)$ indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{cc}X^I \nabla_I {}^{cc}Y^J = X^I \underline{\nabla}_I Y^J$ eşitliği

$$\begin{pmatrix} {}^{cc}X^{Icc} \nabla_I {}^{cc}Y^b \\ {}^{cc}X^{Icc} \nabla_I {}^{cc}Y^\beta \\ {}^{cc}X^{Icc} \nabla_I {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^a \underline{\nabla}_a Y^b \\ X^\alpha \underline{\nabla}_\alpha Y^\beta \\ y^\sigma \partial_\sigma (X^\alpha \underline{\nabla}_\alpha Y^\beta) \end{pmatrix}$$

bileşenleri ile ifade edilir. Burada (3.42) eşitliğini sağlayan konneksiyon katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^b = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^b = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^b = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\bar{b}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{b}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{b}} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b, \\ {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^\beta = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^\beta = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta, \\ {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

şeklindedir. (3.42), (3.44) ve (4.7) kullanılarak

$${}^{cc}\Gamma_{I' K'}^{J'} = A_J^{J'} A_{I'}^I A_{K'}^K {}^{cc}\Gamma_{I K}^J + A_J^{J'} A_{L'}^J {}^{cc}\Gamma_{I' K'}^{L'}$$

konneksiyon dönüşüm kuralının sağlandığı görülür. Burada $I = (a, \alpha, \bar{\alpha})$, $J = (b, \beta, \bar{\beta})$, $K = (c, \gamma, \bar{\gamma})$, $L = (d, \varphi, \bar{\varphi})$ ile tanımlıdır (Vishnevskii 2002)

İspat: (3.42) ve (3.44) eşitlikleri dikkate alınarak ${}^{cc}\Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\bar{\beta}'}$ bileşeni

$$\begin{aligned} {}^{cc}\Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\bar{\beta}'} &= A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\gamma'}^{\gamma} \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}}}_{y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}}} + A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\phi'}}_0 + A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} {}^{cc}\Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\varphi'} + A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\bar{\varphi}'}}_{y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\bar{\varphi}'}} \\ &= A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\gamma'}^{\gamma} y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}} + \underbrace{A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} y^\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\varphi'}}_{-y^\varepsilon \partial_\varepsilon A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} \Gamma_{\alpha \gamma}^{\varphi'}} + \underbrace{A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\varphi'}}_{A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\varphi'}^{\beta} y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\varphi'}} \\ &= A_{\beta'}^{\bar{\beta}'} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\gamma'}^{\gamma} y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}} - y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\beta'} + y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\beta'} \\ &= y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} \Gamma_{\alpha' \gamma'}^{\beta'} \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan ${}^{cc}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}} = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}}$ bulunur. ${}^{cc}\Gamma_{I' K'}^{J'}$ katsayılarının diğer bileşenleri de benzer yolla bulunabilir.

(3.42) ve (3.44) eşitlikleri yardımıyla (4.7)'deki $\Gamma_{I K}^J$ bileşenleri yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonu tanımlar. Bu izdüşümlü lineer konneksiyon, ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonun $t(B_m)$ yarı-tanjant demete tam lifti olup ${}^{cc}\nabla$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.3. Eğer T ve R , sırasıyla, ∇ nin burulma ve eğrilik tensörleri ise, ${}^{cc}T$ ve ${}^{cc}R$ de, sırasıyla, ${}^{cc}\nabla$ nin burulma ve eğrilik tensörleridir.

İspat: Keyfi $X, Y, Z \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için, (4.6) ve Teorem 4.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}T\left({}^{cc}X, {}^{cc}Y\right) &= {}^{cc}\left(T(X, Y)\right) \\
&= {}^{cc}\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\right) \\
&= {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc}Y - {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}Y} {}^{cc}X - [{}^{cc}X, {}^{cc}Y] \\
{}^{cc}R\left({}^{cc}X, {}^{cc}Y\right) {}^{cc}Z &= {}^{cc}\left(R(X, Y)Z\right) \\
&= {}^{cc}\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z\right) \\
&= {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}Y} {}^{cc}Z - {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}Y} {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc}Z - {}^{cc}\nabla_{[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]} {}^{cc}Z
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Teorem 4.2.3 ispatlanmış olur.

T burulma tensörünün lokal koordinatları $T_{\alpha\gamma}{}^\beta$ ve R eğrilik tensörünün lokal koordinatları $R_{\alpha\gamma\phi}{}^\beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\gamma}{}^\beta &= \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta - \Gamma_{\gamma\alpha}{}^\beta \\
R_{\alpha\gamma\phi}{}^\beta &= \partial_\alpha \Gamma_{\gamma\phi}{}^\beta - \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\phi}{}^\beta + \Gamma_{\alpha\phi}{}^\beta \Gamma_{\gamma\phi}{}^\phi - \Gamma_{\gamma\phi}{}^\beta \Gamma_{\alpha\phi}{}^\phi
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunmaktadır. Bu eşitlikler yardımıyla $t(B_m)$ yarı-tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{cc}\nabla$ nın ${}^{cc}T$ burulma tensörünün $T_{I\kappa}{}^J$ bileşenleri,

$$\left\{ \begin{aligned} T_{\alpha\gamma}{}^b &= T_{\alpha\gamma}{}^b \\ T_{\alpha\gamma}{}^\beta &= T_{\alpha\gamma}{}^\beta \\ T_{\alpha\gamma}{}^{\bar{\beta}} &= T_{\alpha\gamma}{}^\beta \\ T_{\alpha\gamma}{}^{\bar{\beta}} &= y^\varepsilon \partial_\varepsilon T_{\alpha\gamma}{}^\beta \\ T_{\alpha\gamma}{}^{\bar{\beta}} &= T_{\alpha\gamma}{}^\beta \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlı olup diğer tüm bileşenler sıfıra eşittir.

Aynı şekilde ${}^{cc}\nabla$ nin ${}^{cc}R$ eğrilik tensörünün $R_{IKL}{}^J$ bileşenleri,

$$\begin{cases} R_{\alpha\gamma\varphi}{}^b &= R_{\alpha\gamma\varphi}{}^b \\ R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta &= R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta \\ R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\bar{\beta}} &= y^\varepsilon \partial_\varepsilon R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta \\ R_{\alpha\bar{\gamma}\varphi}{}^{\bar{\beta}} &= R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta \\ R_{\alpha\gamma\bar{\varphi}}{}^{\bar{\beta}} &= R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta \\ R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\bar{\beta}} &= R_{\alpha\gamma\varphi}{}^\beta \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup diğer bileşenler sıfır olur. Burada $I = (a, \alpha, \bar{\alpha})$, $J = (b, \beta, \bar{\beta})$, $K = (c, \gamma, \bar{\gamma})$ ve $L = (d, \varphi, \bar{\varphi})$ olarak tanımlıdır.

$X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, M_n üzerindeki izdüşümlü bir vektör alanı olsun. X izdüşümlü vektör alanının ${}^{HH}X$ yatay lifti $t(M_n)$ üzerinde

$${}^{HH}X = {}^{cc}X - \gamma(\nabla X) \quad (4.9)$$

ile tanımlıdır. Burada ∇ , B_m diferansiyellenebilir manifoldunda izdüşümlü simetrik lineer konneksiyondur. ${}^{cc}X$ ve $\gamma(\nabla X)$ vektör alanlarının, $t(B_m)$ yarı-tanjant demeteki $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ lokal koordinatlarına göre bileşenleri, sırasıyla,

$${}^{cc}X = ({}^{cc}X^I) = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(\nabla X) = (\gamma(\nabla X)^I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\nabla_\alpha X^\varepsilon$, X^ε nin kovaryant türevi olup

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta\alpha}{}^\varepsilon$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece X izdüşümlü vektör alanının ${}^{HH}X$ yatay lifti $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ lokal koordinatlarına göre

$${}^{HH}X = ({}^{HH}X^I) = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma^\alpha_\beta X^\beta \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

bileşenlerine sahiptir. Burada $\Gamma^\alpha_\beta = y^\varepsilon \Gamma^\alpha_{\varepsilon\beta}$ ile tanımlıdır.

Teorem 4.2.4. $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ için

- i. ${}^{cc}\nabla_{\mathbf{v}_X}{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f = 0$,
- ii. ${}^{cc}\nabla_{\mathbf{v}_X}{}^{cc}f = {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\nabla_X f)$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: i. $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ için (4.1) ve (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} {}^{cc}\nabla_{\mathbf{v}_X}{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^I {}^{cc}\nabla_I{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f \\ &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^a {}^{cc}\nabla_a{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}f \\ &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}\underset{0}{X^a} \underset{0}{\partial_a} f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}\underset{0}{X^\alpha} \underset{0}{\partial_\alpha} f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}\underset{0}{X^{\bar{\alpha}}} \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} f \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ için (4.2) ve (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} {}^{cc}\nabla_{\mathbf{v}_X}{}^{cc}f &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X({}^{cc}f) \\ &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^I \partial_I {}^{cc}f \\ &= {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^a \partial_a {}^{cc}f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^\alpha \partial_\alpha {}^{cc}f + {}^{\mathbf{v}\mathbf{v}}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{cc}f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underset{0}{\overset{vv}{X^a}} \partial_a \overset{cc}{f} + \underset{0}{\overset{vv}{X^\alpha}} \partial_\alpha \overset{cc}{f} + \underset{X^\alpha}{\overset{vv}{X^{\bar{\alpha}}}} \partial_{\bar{\alpha}} \overset{cc}{f} \\
&= X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} y^\beta \partial_\beta f = X^\alpha \delta_\alpha^\beta \partial_\beta f = X^\alpha \partial_\alpha f \\
&= \overset{vv}{(Xf)} \\
&= \overset{vv}{(\nabla_X f)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. X , M_n manifoldu üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $f \in \mathfrak{T}_0^0(B_m)$ olmak üzere

i. $\overset{cc}{\nabla}_{\overset{cc}{X}} \overset{vv}{f} = \overset{vv}{(\nabla_X f)},$

ii. $\overset{cc}{\nabla}_{\overset{cc}{X}} \overset{cc}{f} = \overset{cc}{(\nabla_X f)}$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: i. $f \in \mathfrak{T}_0^0(B_m)$ ve X , $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olmak üzere (4.1) ve (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overset{cc}{\nabla}_{\overset{cc}{X}} \overset{vv}{f} &= \overset{cc}{X} \left(\overset{vv}{f} \right) = \overset{cc}{X^I} \partial_I \overset{vv}{f} \\
&= \overset{cc}{X^a} \partial_a \overset{vv}{f} + \overset{cc}{X^\alpha} \partial_\alpha \overset{vv}{f} + \overset{cc}{X^{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\alpha}} \overset{vv}{f} \\
&= \underset{0}{X^a} \partial_a f + \underset{0}{X^\alpha} \partial_\alpha f + y^\sigma \partial_\sigma \underset{0}{X^{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\alpha}} f \\
&= X^\alpha \partial_\alpha f \\
&= \overset{vv}{(Xf)} \\
&= \overset{vv}{(\nabla_X f)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $f \in \mathfrak{T}_0^0(B_m)$ ve X , $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olmak üzere (4.2) ve (4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X} {}^{cc}f &= {}^{cc}X({}^{cc}f) = {}^{cc}X^I \partial_I {}^{cc}f \\
&= {}^{cc}X^a \partial_a {}^{cc}f + {}^{cc}X^\alpha \partial_\alpha {}^{cc}f + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{cc}f \\
&= X^a \partial_a (y^\beta \partial_\beta f) + X^\alpha \partial_\alpha (y^\beta \partial_\beta f) + y^\beta \partial_\beta X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} (y^\sigma \partial_\sigma f) \\
&= X^a \partial_a y^\beta \partial_\beta f + X^\alpha \partial_\alpha (y^\beta \partial_\beta f) + y^\beta \partial_\beta X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} (y^\sigma \partial_\sigma f) \\
&= y^\beta (X^a \partial_a + X^\alpha \partial_\alpha) \partial_\beta f + y^\beta \partial_\beta X^\alpha \delta_\alpha^\sigma \partial_\sigma f \\
&= y^\beta \partial_\beta (X^a \partial_a + X^\alpha \partial_\alpha) f + (y^\beta \partial_\beta X^\alpha) \partial_\alpha f \\
&= y^\beta \partial_\beta (X^\alpha \partial_\alpha f) \\
&= {}^{cc}(Xf) \\
&= {}^{cc}(\nabla_X f)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ için

$${}^{cc}\nabla_{{}^{vw}X} {}^{vw}Y = 0$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ için (4.3) ve (4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{vw}X} {}^{vw}Y &= \begin{pmatrix} {}^{vw}X^{Icc} \nabla_I {}^{vw}Y^b \\ {}^{vw}X^{Icc} \nabla_I {}^{vw}Y^\beta \\ {}^{vw}X^{Icc} \nabla_I {}^{vw}Y^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{vw}X^a {}^{cc}\nabla_a {}^{vw}Y^{\bar{\beta}} + {}^{vw}X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{vw}Y^{\bar{\beta}} + {}^{vw}X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vw}Y^{\bar{\beta}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha (\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vw}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}_K {}^{vw}Y^K) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindeki bileşenlere sahip, ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{vv}Y = 0$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.7. X , $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olsun. $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ olmak üzere

$${}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: X , M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ olmak üzere (4.3), (4.5) ve (4.7)'den

$$\begin{aligned} {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y &= \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{Icc}\nabla_I{}^{vv}Y^b \\ {}^{cc}X^{Icc}\nabla_I{}^{vv}Y^\beta \\ {}^{cc}X^{Icc}\nabla_I{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{cc}X^a{}^{cc}\nabla_a{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^\alpha{}^{cc}\nabla_\alpha{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(X^a(\partial_a{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + X^\alpha(\partial_\alpha{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \right. \\ \left. + {}^{cc}\Gamma_\alpha{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + (y^\varepsilon\partial_\varepsilon X^\alpha)(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(X^a(\partial_a Y^\beta + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_c}_0 Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_\gamma}_0 Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_{\bar{\gamma}}}_0 Y^{\bar{\gamma}}) \right. \\ \left. + X^\alpha(\partial_\alpha{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_\alpha{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + (y^\varepsilon\partial_\varepsilon X^\alpha)(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(X^\alpha (\partial_\alpha{}^{vv} Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\alpha c}^{\beta vv}}_0 Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta vv}}_{\Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta}} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\alpha \bar{\gamma}}^{\beta vv}}_0 Y^{\bar{\gamma}}) \right) \\ + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) (\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv} Y^\beta + {}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha} K}^{\beta vv} Y^K) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(X^\alpha (\partial_\alpha{}^{vv} Y^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta vv} Y^\gamma) + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) \right. \\ \left. (\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv} Y^\beta + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha} c}^{\beta vv}}_0 Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha} \gamma}^{\beta vv}}_0 Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha} \bar{\gamma}}^{\beta vv}}_0 Y^{\bar{\gamma}}) \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_{\alpha \gamma}^{\beta} Y^\gamma) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X Y)^\beta \end{pmatrix} \\
&= {}^{vv} (\nabla_X Y)
\end{aligned}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olan ${}^{cc} \nabla_{cc X} {}^{vv} Y = {}^{vv} (\nabla_X Y)$ denklemi elde edilir. Burada

$K = (c, \gamma, \bar{\gamma})$ ile tanımlıdır.

∇ izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı verilmiş olsun. X izdüşümlü vektör alanına göre Lie

türevi tanımından $L_X \nabla$, $\mathfrak{S}_2^1(B_m)$ nin bir elemanı olup keyfi $Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.11)$$

eşitliği geçerlidir.

Eğer $L_X \nabla = 0$ ise $X = X^a(x^a, x^\alpha) \partial_a + X^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$ bileşenleri ile verilen $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ (Vishnevskii 2002) izdüşümlü vektör alanı, ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonuna sahip m-boyutlu B_m manifoldunda bir infinitesimal lineer dönüşüm (affin tanımından) Tanaka (1969), Vishnevskii (2002) olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.8. ∇ , B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ keyfi izdüşümlü vektör alanları için

$$(L_{cc_X} {}^{cc} \nabla)({}^{cc} Y, {}^{cc} Z) = {}^{cc} \left((L_X \nabla)(Y, Z) \right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (4.6) ve Teorem 4.2.1, (4.11)'de yerine yazılırsa

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} (L_{cc_X} {}^{cc} \nabla)({}^{cc} Y, {}^{cc} Z) &= L_{cc_X} ({}^{cc} \nabla_{cc_Y} {}^{cc} Z) - {}^{cc} \nabla_{cc_Y} (L_{cc_X} {}^{cc} Z) - {}^{cc} \nabla_{[{}^{cc} X, {}^{cc} Y]} {}^{cc} Z \\ &= L_{cc_X} ({}^{cc} (\nabla_Y Z)) - {}^{cc} \nabla_{cc_Y} ({}^{cc} (L_X Z)) - {}^{cc} \nabla_{[{}^{cc} X, {}^{cc} Y]} {}^{cc} Z \\ &= {}^{cc} \left(L_X (\nabla_Y Z) \right) - {}^{cc} \left(\nabla_Y (L_X Z) \right) - {}^{cc} \left(\nabla_{[X, Y]} Z \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{cc} \left(L_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z \right) \\
&= {}^{cc} \left((L_X \nabla)(Y, Z) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bileşenlere sahip olduğundan, $(L_{cc_X} {}^{cc} \nabla)({}^{cc} Y, {}^{cc} Z) = {}^{cc} \left((L_X \nabla)(Y, Z) \right)$ eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki teorem kullanılarak Teorem 4.2.9 elde edilir.

Teorem 4.2.9. Eğer $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonu ile birlikte verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin bir infinitesimal dönüşümü ise ${}^{cc} X$ vektör alanı da ${}^{cc} \nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonu ile birlikte verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin bir infinitesimal dönüşümüdür.

Teorem 4.2.10. X ve Y , sırasıyla, $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

i. ${}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y = 0$,

ii. ${}^{cc} \nabla_{HH_X} {}^{vv} Y = {}^{vv} (\nabla_X Y)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: i. $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} ({}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y)^b \\ ({}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y)^\beta \\ ({}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$

indirgenmiş koordinatlarına göre ${}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{cc} \nabla_{vv_X} {}^{HH} Y \right)^J = {}^{vv} X^a {}^{cc} \nabla_a {}^{HH} Y^J + {}^{vv} X^\alpha {}^{cc} \nabla_\alpha {}^{HH} Y^J + {}^{vv} X^{\bar{\alpha}} {}^{cc} \nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH} Y^J$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{cc}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^b &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{cc}\nabla_a {}^{HH}Y^b + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + \nu X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\
&= X^a \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} Y^b + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^b}{}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^b}{}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^b}{}^{HH} Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{cc}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^\beta &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{cc}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + \nu X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\
&= X^a \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} Y^\beta + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^\beta}{}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^\beta}{}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\beta}{}^{HH} Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{cc}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{cc}\nabla_a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \nu X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&= X^a \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^{\bar{\beta}}}{}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^{\bar{\beta}}}_{\Gamma_{\alpha\gamma}^{\bar{\beta}}} {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{\bar{\beta}}}_{\Gamma_{\alpha\bar{\gamma}}^{\bar{\beta}}} {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= X^a \left(-\underset{\delta_\alpha^\varepsilon}{\partial_{\bar{\alpha}}} y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\gamma}^{\beta} Y^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} Y^\gamma \right) \\
&= X^a \left(-\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} Y^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} Y^\gamma \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ${}^{cc}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y = 0$ eşitliği gösterilmiş olur.

$$\text{ii. } X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n) \text{ ve } \begin{pmatrix} \left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^b \\ \left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^\beta \\ \left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \quad t(B_m) \text{ yarı-tanjant demette } (x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$$

indirgenmiş koordinatlarına göre $\left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^J = {}^{HH} X^a {}^{cc}\nabla_a {}^{vv}Y^J + {}^{HH} X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^J + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^b &= {}^{HH} X^a {}^{cc}\nabla_a {}^{vv}Y^b + {}^{HH} X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b \\ &= X^a \left(\partial_a {}^{vv}Y^b + {}^{HH} \Gamma_a^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_a^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_a^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &\quad + X^\alpha \left(\partial_\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{HH} \Gamma_\alpha^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_\alpha^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_\alpha^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &\quad + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} \left(\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{cc}\nabla_{HH X} {}^{vv}Y \right)^\beta &= {}^{HH} X^a {}^{cc}\nabla_a {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH} X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta \\ &= X^a \left(\partial_a {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH} \Gamma_a^\beta {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_a^\beta {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_a^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &\quad + X^\alpha \left(\partial_\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH} \Gamma_\alpha^\beta {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_\alpha^\beta {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_\alpha^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &\quad + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} \left(\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta {}^{vv}Y^c + {}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{cc}\nabla_{HH\ X} {}^{vv}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{HH} X^a {}^{cc}\nabla_a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{HH} X^\alpha {}^{cc}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= X^a \left(\partial_a Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c + {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_{0} \right) \\
&\quad + X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c + {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} Y^{\bar{\gamma}}} \right) \\
&\quad + X^{\bar{\alpha}} \left(\partial_{\bar{\alpha}} Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_{0} \right) \\
&= X^\alpha (\partial_\alpha Y^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&= (\nabla_X Y)^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

bulunur. $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ üzerinde ${}^{vv}(\nabla_X Y)$ nin bileşenleri

$${}^{vv}(\nabla_X Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X Y)^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{cc}\nabla_{HH\ X} {}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

∇ , B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere yatay liftin (4.9) tanımından ve (4.8)'den keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$${}^{cc}\nabla_{HH\ X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\ , X)Y)$$

eşitliği elde edilir. Burada $R(\ , X)Y$, B_m üzerinde (1,1) tipli bir F tensör alanı olup keyfi $Z \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ vektör alanı için $F(Z) = R(Z, X)Y$ şeklinde tanımlıdır.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} {}^{HH}X^I(\partial_I {}^{HH}Y^b + {}^{cc}\Gamma_I^b {}^{HH}Y^K) \\ {}^{HH}X^I(\partial_I {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_I^\beta {}^{HH}Y^K) \\ {}^{HH}X^I(\partial_I {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}\Gamma_I^{\bar{\beta}} {}^{HH}Y^K) \end{pmatrix}, t(B_m)$ yarı-tanjant demette

$(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y$ nin bileşenleri olmak üzere

$${}^{HH}(\nabla_X Y)^J = ({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y)^J$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned} {}^{HH}(\nabla_X Y)^b &= ({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y)^b \\ &= {}^{HH}X^I(\partial_I {}^{HH}Y^b + {}^{cc}\Gamma_I^b {}^{HH}Y^K) \\ &= {}^{HH}X^a(\partial_a {}^{HH}Y^b + {}^{cc}\Gamma_a^b {}^{HH}Y^K) \\ &\quad + {}^{HH}X^\alpha(\partial_\alpha {}^{HH}Y^b + {}^{cc}\Gamma_\alpha^b {}^{HH}Y^K) + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b {}^{HH}Y^K) \\ &= {}^{HH}X^a(\underbrace{\partial_a Y^b}_0 + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a^b c}_{0} {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a^b \gamma}_{0} {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a^b \bar{\gamma}}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + {}^{HH}X^\alpha(\partial_\alpha Y^b + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_\alpha^b c}_{0} {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_\alpha^b \gamma}_{0} {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_\alpha^b \bar{\gamma}}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\alpha}} Y^b + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b c}_{0} {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b \gamma}_{0} {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b \bar{\gamma}}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}}) \\ &= X^\alpha(\partial_\alpha Y^b + \Gamma_\alpha^b Y^\gamma) \\ &= {}^{HH}(\nabla_X Y)^b \end{aligned}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} {}^{HH}(\nabla_X Y)^\beta &= ({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y)^\beta \\ &= {}^{HH}X^I(\partial_I {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_I^\beta {}^{HH}Y^K) \\ &= {}^{HH}X^a(\partial_a {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_a^\beta {}^{HH}Y^K) \\ &\quad + {}^{HH}X^\alpha(\partial_\alpha {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_\alpha^\beta {}^{HH}Y^K) + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta {}^{HH}Y^K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{HH} X^a (\partial_a Y^\beta + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^\beta{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^\beta{}^\gamma}_{0} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^\beta{}^{\bar{\gamma}}}_{0} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&\quad + {}^{HH} X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^\beta{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^\beta{}^\gamma}_{0} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^\beta{}^{\bar{\gamma}}}_{0} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&\quad + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\alpha}} Y^\beta + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}^\gamma}_{0} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}^{\bar{\gamma}}}_{0} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&= X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_\alpha^\beta{}^\gamma Y^\gamma) \\
&= {}^{HH} (\nabla_X Y)^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.7) ve (4.10) kullanılarak, $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
{}^{HH} (\nabla_X Y)^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc} \nabla_{HH X} {}^{HH} Y)^{\bar{\beta}} \\
&= {}^{HH} X^I (\partial_I {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc} \Gamma_I^{\bar{\beta}}{}^K {}^{HH} Y^K) \\
&= {}^{HH} X^a (\partial_a {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc} \Gamma_a^{\bar{\beta}}{}^K {}^{HH} Y^K) \\
&\quad + {}^{HH} X^\alpha (\partial_\alpha {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc} \Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}^K {}^{HH} Y^K) + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}^K {}^{HH} Y^K) \\
&= {}^{HH} X^a (\partial_a {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^{\bar{\beta}}{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^{\bar{\beta}}{}^\gamma}_{0} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_a^{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}}_{0} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&\quad + {}^{HH} X^\alpha (\partial_\alpha {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}^\gamma}_{\Gamma_\alpha^{\beta}{}^\gamma} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}}_{\Gamma_\alpha^{\beta}{}^{\bar{\gamma}}} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&\quad + {}^{HH} X^{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH} Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}^c}_{0} {}^{HH} Y^c + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}^\gamma}_{\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta}{}^\gamma} {}^{HH} Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc} \Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}}_{0} {}^{HH} Y^{\bar{\gamma}}) \\
&= X^a (\partial_a (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi Y^\phi)) + X^\alpha (\partial_\alpha (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi Y^\phi)) \\
&\quad + y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma Y^\gamma + \Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\gamma{}_\beta Y^\beta) \\
&\quad + (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha{}_\phi Y^\phi) (\partial_{\bar{\alpha}} (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\sigma Y^\sigma) + \Gamma_\alpha^\beta{}_\sigma Y^\sigma) \\
&= X^a ((-\partial_a \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi) y^\varepsilon Y^\phi) + X^\alpha ((-\partial_\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi) y^\varepsilon Y^\phi) \\
&\quad - y^\varepsilon X^a \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi (\partial_a Y^\phi) - y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi (\partial_\alpha Y^\phi) \\
&\quad + X^\alpha (\partial_\varepsilon \Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma) y^\varepsilon Y^\gamma - X^\alpha \Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma \Gamma_\varepsilon^\gamma{}_\sigma y^\varepsilon Y^\sigma \\
&= X^\alpha Y^\phi y^\varepsilon (-\partial_\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi + \partial_\varepsilon \Gamma_\alpha^\beta{}_\phi - \Gamma_\alpha^\beta{}_\sigma \Gamma_\varepsilon^\sigma{}_\phi + \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\sigma \Gamma_\varepsilon^\sigma{}_\phi) \\
&\quad - \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\sigma \Gamma_\alpha^\sigma{}_\phi X^\alpha Y^\phi y^\varepsilon - \Gamma_\varepsilon^\beta{}_\phi y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\phi \\
&= y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\phi}^\beta X^\alpha Y^\phi + {}^{HH} (\nabla_X Y)^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

bulunur. ${}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^b, x^\beta, \bar{x}^{\bar{\beta}})$ koordinatlara göre bileşenleri

$${}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y) = \begin{pmatrix} {}^{HH}(\nabla_X Y)^b \\ {}^{HH}(\nabla_X Y)^\beta \\ {}^{HH}(\nabla_X Y)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\phi}{}^\beta X^\alpha Y^\phi \end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

4.3 İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Yatay Liftleri

B_m baz manifoldunda ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonu verilsin. ∇ konneksiyonun $t(B_m)$ yarı-tanjant demette yatay liftini ${}^{HH}\nabla$ şeklinde aşağıdaki şartlar ile birlikte tanımlayalım. Her $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned} (i) \quad & {}^{HH}\nabla_{{}^{vv}X} {}^{vv}Y = 0, \\ (ii) \quad & {}^{HH}\nabla_{{}^{vv}X} {}^{HH}Y = 0, \\ (iii) \quad & {}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y), \\ (iv) \quad & {}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Eğer her $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için

$$S(X, Y) = {}^{HH}\nabla_X Y - {}^{cc}\nabla_X Y \tag{4.13}$$

olarak alınırsa Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.10 ve (4.13) kullanılarak $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki (1,2) tipli S tensörü, $\forall X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned} (i) \quad & S({}^{vv}X, {}^{vv}Y) = 0, \\ (ii) \quad & S({}^{vv}X, {}^{HH}Y) = 0, \\ (iii) \quad & S({}^{HH}X, {}^{vv}Y) = 0, \\ (iv) \quad & S({}^{HH}X, {}^{HH}Y) = -\gamma(R(\cdot, X)Y) \end{aligned} \tag{4.14}$$

şartlarını sağlar. Bu nedenle S tensörü $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$S_{\alpha\gamma}^{\bar{\beta}} = -y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\gamma}^{\beta} \quad (4.15)$$

diğerleri sıfır olacak şekilde S_{IK}^J bileşenlerine sahiptir.

${}^{cc}\nabla$ konneksiyonunun ${}^{cc}\Gamma_{IK}^J$ bileşenleri (4.7) ile verildiğinden, ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonunun ${}^{HH}\nabla$ yatay liftinin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b = {}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b = 0, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b = \Gamma_{a\ \gamma}^b, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta = {}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta = 0, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta = \Gamma_{a\ \gamma}^\beta, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} = {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = 0, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = \Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}}, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{a\ \gamma}^\beta - y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\gamma}^{\beta}, \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = \Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

şeklinde ${}^{HH}\Gamma_{IK}^J$ bileşenlerine sahip olduğu (4.13) ve (4.15)'dan elde edilir. Burada ${}^{HH}\Gamma_{IK}^J$, $t(B_m)$ de ${}^{HH}\nabla$ nın konneksiyon katsayılarıdır.

İspat: Gerçekten de (4.7), (4.13) ve (4.15) kullanılarak ${}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}}$ bileşenleri için

$$\begin{aligned} S_{\alpha\gamma}^{\bar{\beta}} &= {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} - {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} \\ -y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\gamma}^{\beta} &= {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} - y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{a\ \gamma}^\beta \\ {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} &= y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{a\ \gamma}^\beta - y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\gamma}^{\beta}. \end{aligned}$$

olacak şekilde ${}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{a\ \gamma}^\beta - y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\gamma}^{\beta}$ elde edilir. Benzer olarak, ${}^{HH}\Gamma_{IK}^J$ nin diğer bileşenleri de kolaylıkla bulunabilir.

Teorem 4.3.1. $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ için

$${}^{HH}\nabla_{w_X}^{vw} Y = 0$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve
$$\begin{pmatrix} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^b \\ \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^\beta \\ \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \quad t(B_m) \text{ yarı-tanjant demette } (x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$$

koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^J = {}^{\nu\nu}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{\nu\nu}Y^J + {}^{\nu\nu}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{\nu\nu}Y^J + {}^{\nu\nu}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{\nu\nu}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.3) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^b &= {}^{\nu\nu}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{\nu\nu}Y^b + {}^{\nu\nu}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{\nu\nu}Y^b + {}^{\nu\nu}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{\nu\nu}Y^b \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^\beta &= {}^{\nu\nu}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{\nu\nu}Y^\beta + {}^{\nu\nu}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{\nu\nu}Y^\beta + {}^{\nu\nu}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{\nu\nu}Y^\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, (4.3) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{\nu\nu}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{\nu\nu}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{\nu\nu}Y^{\bar{\beta}} + {}^{\nu\nu}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{\nu\nu}Y^{\bar{\beta}} + {}^{\nu\nu}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{\nu\nu}Y^{\bar{\beta}} \\ &= {}^{\nu\nu}X^\alpha \left(\partial_{\bar{\alpha}} Y^{\bar{\beta}} + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta} {}^{\nu\nu}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta} {}^{\nu\nu}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta} {}^{\nu\nu}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. Y , B_m üzerinde Y izdüşümüne sahip M_n manifoldunda bir izdüşümlü

vektör alanı olsun. $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y = 0$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve
$$\begin{pmatrix} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^b \\ \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^\beta \\ \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, \quad t(B_m) \text{ yarı-tanjant demette}$$

$(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^J = \underset{0}{\nu X^a} {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^J + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^J + \underset{X^\alpha}{\nu X^{\bar{\alpha}}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^b &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^b + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + \underset{X^\alpha}{\nu X^{\bar{\alpha}}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\ &= X^\alpha \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} Y^b + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^b}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^\beta &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + \underset{X^\alpha}{\nu X^{\bar{\alpha}}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\ &= X^\alpha \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^\beta}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{\nu X} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} &= \underset{0}{\nu X^a} {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \underset{0}{\nu X^\alpha} {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \underset{X^\alpha}{\nu X^{\bar{\alpha}}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\ &= X^\alpha \left(\underset{\delta_\alpha^\varepsilon}{-\partial_{\bar{\alpha}}} Y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\gamma}^\beta Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}^{\bar{\beta}}}_{0} Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}^{\bar{\beta}} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^{\bar{\beta}}}_{0} Y^{\bar{\gamma}} \right) \\ &= -X^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta Y^\gamma + X^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta Y^\gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.3.3. X ve Y sırasıyla $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ izdüşümlerine sahip

M_n manifoldu üzerinde izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} \left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{HH}Y \right)^b \\ \left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{HH}Y \right)^\beta \\ \left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$

koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{HH}Y \right)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{cc_X} {}^{HH}Y \right)^J = {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^J + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^J + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.5), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{cc_X} {}^{HH}Y \right)^b &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^b + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\ &= X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^b + X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\ &= X^a (\partial_a Y^b + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + X^\alpha (\partial_\alpha Y^b + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^b}_{0} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^b}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &= X^\alpha \partial_\alpha Y^b + X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b Y^\gamma \\ &= X^\alpha (\partial_\alpha Y^b + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b Y^\gamma) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.5), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{cc_X} {}^{HH}Y \right)^\beta &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\ &= X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\ &= X^a (\partial_a Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + (y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha) (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^\beta}_{0} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^\beta}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &= X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta + X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta Y^\gamma \\ &= X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta Y^\gamma) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.5), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{cc_X} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&= X^a {}^{HH}\nabla_a \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma \right) + X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma \right) \\
&= \left(y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \right) {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma \right) \\
&= -X^a \underbrace{\partial_a \Gamma_\varepsilon^\beta}_0 y^\varepsilon Y^\sigma - X^a \underbrace{\partial_a y^\varepsilon}_0 \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma - X^a \Gamma_\varepsilon^\beta \underbrace{y^\varepsilon \partial_a}_0 Y^\sigma \\
&\quad - X^\alpha \partial_\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta y^\varepsilon Y^\sigma - X^\alpha \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma - X^\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta y^\varepsilon \partial_\alpha Y^\sigma \\
&\quad + X^\alpha y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_\alpha^\beta Y^\sigma - X^\alpha y^\phi \partial_\phi \Gamma_\alpha^\beta Y^\sigma + X^\alpha y^\phi \partial_\alpha \Gamma_\phi^\beta Y^\sigma \\
&\quad - X^\alpha y^\phi \Gamma_\phi^\beta \Gamma_\alpha^\phi Y^\sigma + X^\alpha y^\phi \Gamma_\alpha^\beta \Gamma_\phi^\phi Y^\sigma - X^\alpha \Gamma_\alpha^\beta \Gamma_\varepsilon^\sigma y^\varepsilon Y^\phi \\
&\quad - \Gamma_\varepsilon^\beta y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\sigma + \Gamma_\varepsilon^\beta y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\sigma \\
&= -\Gamma_\varepsilon^\beta y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\sigma + \Gamma_\phi^\beta \Gamma_\alpha^\phi X^\alpha y^\phi Y^\sigma
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ${}^{HH}\nabla_{cc_X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y)$ olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.3.4. X , B_m manifoldundaki X izdüşümü ile M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı olsun. $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $\begin{pmatrix} \left({}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y \right)^b \\ \left({}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y \right)^\beta \\ \left({}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette

$(X^b, X^\beta, X^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y \right)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{HH_X} {}^{vv}Y \right)^J = {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^J + {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^J + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{vv}Y \right)^b &= {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^b + {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b \\
&= X^a (\underbrace{\partial_a {}^{vv}Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + X^\alpha (\underbrace{\partial_\alpha {}^{vv}Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^b {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^b {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{vv}Y \right)^\beta &= {}^{HH}X^a \underbrace{{}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^\beta}_0 + {}^{HH}X^\alpha \underbrace{{}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^\beta}_0 + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \underbrace{{}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta}_0 \\
&= X^a (\underbrace{\partial_a {}^{vv}Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + X^\alpha (\underbrace{\partial_\alpha {}^{vv}Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^\beta {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^\beta {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^\beta {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^\beta {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{vv}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{HH}X^a \underbrace{{}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + {}^{HH}X^\alpha \underbrace{{}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \underbrace{{}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 \\
&= X^a (\underbrace{\partial_a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + X^\alpha (\underbrace{\partial_\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&\quad + (-y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\ \beta}^\alpha Y^\beta) (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^\gamma}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^{\bar{\beta}} + X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} Y^\gamma \\
&= X^\alpha (\partial_\alpha Y^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\bar{\beta}} Y^\gamma) \\
&= (\nabla_X Y)^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

bulunur. ${}^{vv}(\nabla_X Y)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki indirgenmiş $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşeni

$${}^{vv}(\nabla_X Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X Y)^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X}{}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.5. X , M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ ve $\begin{pmatrix} ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^b \\ ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^\beta \\ ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette

$(X^b, X^\beta, X^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^J = {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^J + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^J + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.3), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned} ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{vv}Y)^b &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^b + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b \\ &= X^a (\partial_a {}^{vv}Y^b + {}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\ &\quad + X^\alpha (\partial_\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\ &\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^b {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^b {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^b {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{vv}Y \right)^\beta &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta \\
&= X^a \left(\underbrace{\partial_a {}^{vv}Y^\beta}_0 + {}^{HH}\Gamma_a^\beta{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_a^\beta{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^\beta{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\
&\quad + X^\alpha \left(\underbrace{\partial_\alpha {}^{vv}Y^\beta}_0 + {}^{HH}\Gamma_\alpha^\beta{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_\alpha^\beta{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_\alpha^\beta{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\
&\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \left(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta}_0 + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^\beta{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{vv}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= X^a \left(\underbrace{\partial_a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + {}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}}{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}}{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\
&\quad + X^\alpha \left(\underbrace{\partial_\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_{Y^\beta} + {}^{HH}\Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_\alpha^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_{\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta} \right) \\
&\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \left(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}}}_0 + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}_c {}^{vv}Y^c + {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}_\gamma {}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\gamma}} {}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \right) \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta + X^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta Y^\gamma \\
&= X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta Y^\gamma \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. ${}^{vv}(\nabla_X Y)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki indirgenmiş $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşeni

$${}^{vv}(\nabla_X Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X Y)^\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.6. X , M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{ccX} {}^{vv}\omega = {}^{vv}(\nabla_X \omega)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ ve $\left(\left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_c, \left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_\gamma, \left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_{\bar{\gamma}} \right)$,

$t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^c, x^\gamma, x^{\bar{\gamma}})$ koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_K$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_K = {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{vv}\omega_K + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha{}^{vv}\omega_K + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega_K$$

eşitliği geçerlidir. (3.45), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $K = c$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_K &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{vv}\omega_K + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha{}^{vv}\omega_K + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega_K \\ &= X^a \underbrace{(\partial_a{}^{vv}\omega_c - {}^{HH}\Gamma_{ac}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{ac}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{ac}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &\quad + X^\alpha \underbrace{(\partial_\alpha{}^{vv}\omega_c - {}^{HH}\Gamma_{\alpha c}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha c}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha c}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \underbrace{(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega_c - {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}c}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.45), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $K = \gamma$ için

$$\begin{aligned} \left({}^{HH}\nabla_{ccX}{}^{vv}\omega \right)_\gamma &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{vv}\omega_\gamma + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha{}^{vv}\omega_\gamma + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega_\gamma \\ &= {}^{cc}X^a \underbrace{(\partial_a{}^{vv}\omega_\gamma - {}^{HH}\Gamma_{a\gamma}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\gamma}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\gamma}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &\quad + {}^{cc}X^\alpha \underbrace{(\partial_\alpha{}^{vv}\omega_\gamma - {}^{HH}\Gamma_{\alpha\gamma}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_{\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta{}^{vv}\omega_b} - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \underbrace{(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega_\gamma - {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}{}^b{}^{vv}\omega_b)}_0 - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}{}^\beta{}^{vv}\omega_\beta}_{\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}{}^\beta{}^{vv}\omega_b} - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\gamma}{}^{\bar{\beta}}{}^{vv}\omega_{\bar{\beta}}}_0 \\ &= X^\alpha \partial_\alpha \omega_\gamma - X^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta \omega_\beta \\ &= X^\alpha \left(\partial_\alpha \omega_\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta \omega_\beta \right) \\ &= (\nabla_X \omega)_\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (3.45), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $K = \bar{\gamma}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{cc} {}^{vv}\omega \right)_{\bar{\gamma}} &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} + {}^{cc}X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha} {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} \\
&= X^a \left(\underset{0}{\partial_a} {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_a^b} \underset{0}{{}^{\gamma}} {}^{vv}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^{\beta}}_{\underset{0}{\gamma}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&\quad + X^{\alpha} \left(\underset{0}{\partial_{\alpha}} {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^b} \underset{0}{{}^{\gamma}} {}^{vv}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\beta}}_{\underset{0}{\gamma}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} {}^{vv}\omega_{\bar{\gamma}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b} \underset{0}{{}^{\gamma}} {}^{vv}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta}}_{\underset{0}{\gamma}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. ${}^{vv}(\nabla_X \omega)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^c, x^{\gamma}, x^{\bar{\gamma}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$${}^{vv}(\nabla_X \omega) = (0, (\nabla_X \omega)_{\gamma}, 0)$$

şeklinde olup ${}^{HH}\nabla_{cc} {}^{vv}\omega = {}^{vv}(\nabla_X \omega)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.7. $X \in \mathfrak{F}_0^1(B_m)$ ve $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(B_m)$ olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $X \in \mathfrak{F}_0^1(B_m)$, $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(B_m)$ ve $\left(({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega)_c, ({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega)_{\gamma}, ({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega)_{\bar{\gamma}} \right), t(B_m)$

yarı-tanjant demette $(x^c, x^{\gamma}, x^{\bar{\gamma}})$ koordinatlarına göre $({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega)_K$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega \right)_K = {}^{vv}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{vv}\omega_K + {}^{vv}X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha} {}^{vv}\omega_K + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}\omega_K$$

eşitliği geçerlidir. (3.45), (4.3) ve (4.16) kullanılarak $K=c$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{vv} {}^{vv}\omega \right)_c &= \underset{0}{{}^{vv}X^a} \underset{0}{{}^{HH}\nabla_a} {}^{vv}\omega_c + \underset{0}{{}^{vv}X^{\alpha}} \underset{0}{{}^{HH}\nabla_{\alpha}} {}^{vv}\omega_c + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{vv}\omega_c \\
&= {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}} {}^{vv}\omega_c - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^b} \underset{0}{{}^{\gamma}} {}^{vv}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\beta}}_{\underset{0}{\gamma}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} - \underset{0}{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}} {}^{vv}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.45), (4.3) ve (4.16) kullanılarak $K=\gamma$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{\omega_X}{}^{\omega}\omega \right)_{\gamma} &= \underset{0}{\omega} X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{\omega}\omega_{\gamma} + \underset{0}{\omega} X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha}{}^{\omega}\omega_{\gamma} + \underset{X^{\alpha}}{\omega} X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{\omega}\omega_{\gamma} \\
&= X^{\alpha} \left(\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}}{}^{\omega}\omega_{\gamma} - {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}{}^b{}_{\gamma}{}^{\omega}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}{}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\omega}\omega_b}_0 - {}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}}{}_{\gamma}{}^{\omega}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (3.45), (4.3) ve (4.16) kullanılarak $K = \bar{\gamma}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{\omega_X}{}^{\omega}\omega \right)_{\bar{\gamma}} &= \underset{0}{\omega} X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{\omega}\omega_{\bar{\gamma}} + \underset{0}{\omega} X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha}{}^{\omega}\omega_{\bar{\gamma}} + \underset{X^{\alpha}}{\omega} X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{\omega}\omega_{\bar{\gamma}} \\
&= \underset{0}{\omega} X^{\bar{\alpha}} \left(\underset{0}{\partial_{\alpha}}{}^{\omega}\omega_{\bar{\gamma}} - {}^{HH}\Gamma_{\alpha}{}^b{}_{\bar{\gamma}}{}^{\omega}\omega_b - \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\bar{\gamma}}{}^{\omega}\omega_{\beta}}_0 - {}^{HH}\Gamma_{\alpha}{}^{\bar{\beta}}{}_{\bar{\gamma}}{}^{\omega}\omega_{\bar{\beta}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ${}^{HH}\nabla_{\omega_X}{}^{\omega}\omega = 0$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.8. X ve Y sırasıyla $X \in \mathfrak{I}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{I}_0^1(B_m)$ izdüşümlerine sahip

M_n manifoldunda izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y)$$

eşitliği geçerlidir.

$$\text{İspat: } X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n) \text{ ve } \begin{pmatrix} \left({}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y \right)^b \\ \left({}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y \right)^{\beta} \\ \left({}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, t(B_m) \text{ yarı-tanjant demette } (x^b, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$$

koordinatlarına göre $\left({}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y \right)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{HH}\nabla_{HH_X}{}^{HH}Y \right)^J = {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a{}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha}{}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{HH}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y \right)^b &= {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^b + {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\
&= X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^b + X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^b + \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\phi \right) {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b \\
&= X^a \left(\partial_a Y^b + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b}_0 {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b}_0 {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&\quad + X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^b + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^b}_0 {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b} {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^b}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&\quad + \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\phi \right) \left(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^b}_0 {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^b}_0 {}^{HH}Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^b}_0 {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^b + X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b Y^\gamma \\
&= X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^b + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b Y^\gamma \right) \\
&= {}^{HH}(\nabla_X Y)^b
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y \right)^\beta &= {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\
&= X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^\beta + X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^\beta + \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\phi \right) {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta \\
&= X^a \left(\partial_a Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta}_0 Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta}_0 Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta}_0 Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&\quad + X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^\beta}_0 Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^\beta}_0 Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&\quad + \left(-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\phi \right) \left(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^\beta}_0 Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^\beta}_0 Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^\beta}_0 Y^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta + X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta Y^\gamma \\
&= X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta Y^\gamma \right) \\
&= {}^{HH}(\nabla_X Y)^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.10) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{HH}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + {}^{HH}X^\alpha (\partial_\alpha (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\phi) + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha c}^{\bar{\beta}}}_{0} {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{HH}Y^\gamma}_{y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^\beta Y^\gamma - y^\varepsilon R_{\alpha \gamma}^\beta Y^\gamma} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\bar{\beta}}}_{\Gamma_{\alpha \gamma}^\beta} {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}}) \\
&\quad + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} (\partial_{\bar{\alpha}} (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\phi) + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha} c}^{\bar{\beta}}}_{0} {}^{HH}Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha} \gamma}^{\bar{\beta}} {}^{HH}Y^\gamma}_{\Gamma_{\bar{\alpha} \gamma}^\beta Y^\sigma} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha} \gamma}^{\bar{\beta}}}_{0} {}^{HH}Y^{\bar{\gamma}}) \\
&= X^\alpha (\partial_\alpha (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\phi) + y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^\beta Y^\gamma - y^\varepsilon R_{\alpha \gamma}^\beta Y^\gamma - \Gamma_{\alpha \gamma}^\beta (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\gamma Y^\beta)) \\
&\quad + (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha Y^\phi) (\partial_{\bar{\alpha}} (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\phi) + \Gamma_{\alpha \sigma}^\beta Y^\sigma) \\
&= X^\alpha ((-\partial_\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta) y^\varepsilon Y^\phi - y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta (\partial_\alpha Y^\phi) + (\partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \gamma}^\beta) y^\varepsilon Y^\gamma \\
&\quad - y^\varepsilon R_{\alpha \gamma}^\beta Y^\gamma - \Gamma_{\alpha \gamma}^\beta \Gamma_{\varepsilon \sigma}^\gamma y^\varepsilon Y^\sigma) + \Gamma_{\varepsilon \phi}^\alpha \Gamma_{\varepsilon \sigma}^\beta y^\varepsilon X^\phi Y^\sigma - \Gamma_{\varepsilon \phi}^\alpha \Gamma_{\alpha \sigma}^\beta y^\varepsilon X^\phi Y^\sigma \\
&= X^\alpha Y^\phi y^\varepsilon (-\partial_\alpha \Gamma_\varepsilon^\beta + \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha \phi}^\beta - \Gamma_{\alpha \sigma}^\beta \Gamma_{\varepsilon \phi}^\sigma + \Gamma_{\varepsilon \sigma}^\beta \Gamma_{\alpha \phi}^\sigma) \\
&\quad - y^\varepsilon R_{\alpha \phi}^\beta X^\alpha Y^\phi - \Gamma_{\varepsilon \sigma}^\beta \Gamma_{\alpha \phi}^\sigma X^\alpha Y^\phi y^\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon \phi}^\beta y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\phi \\
&= y^\varepsilon R_{\alpha \phi}^\beta X^\alpha Y^\phi - y^\varepsilon R_{\varepsilon \alpha \phi}^\beta X^\alpha Y^\phi - \Gamma_{\varepsilon \sigma}^\beta \Gamma_{\alpha \phi}^\sigma X^\alpha Y^\phi y^\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon \phi}^\beta y^\varepsilon X^\alpha \partial_\alpha Y^\phi \\
&= {}^{HH}(\nabla_X Y)^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.3.9. X ve Y sırasıyla $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ izdüşümlerine sahip M_n manifoldunda izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y - \gamma(R(\cdot, X)Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$ eşitliği ve Teorem 4.3.8 kullanılarak her

$X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için

$${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}(\nabla_X Y) + \gamma(R(\cdot, X)Y)$$

$${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y + \gamma(R(\cdot, X)Y)$$

$${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y = {}^{cc}\nabla_{{}^{HH}X} {}^{HH}Y - \gamma(R(\cdot, X)Y)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(4.13), (4.15) veya (4.16) kullanılarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.3.10. B_m manifoldundaki ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonunun ${}^{cc}\nabla$ tam lifti ve ${}^{HH}\nabla$ yatay liftinin çakışması için gerek ve yeter şart ∇ nın eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Teorem 4.3.11. X ve Y sırasıyla $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ izdüşümlerine sahip M_n manifoldunda izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

$${}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y = {}^{cc}(\nabla_X Y) - \gamma(R(\cdot, X)Y)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^b \\ ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^\beta \\ ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$

koordinatlarına göre $({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^J$ nin bileşenleri olmak üzere

$$({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^J = {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{cc}Y^J + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{cc}Y^J + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. (4.4), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = b$ için

$$\begin{aligned} ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^b &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{cc}Y^b + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{cc}Y^b + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^b \\ &= X^a (\underbrace{\partial_a Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^b}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + X^\alpha (\underbrace{\partial_\alpha Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^b} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^b}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^b}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^b}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^b}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &= X^\alpha (\partial_\alpha Y^b + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^b Y^\gamma) \\ &= {}^{cc}(\nabla_X Y)^b \end{aligned}$$

elde edilir. (4.4), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} ({}^{HH}\nabla_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y)^\beta &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}X^\alpha {}^{HH}\nabla_\alpha {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^\beta \\ &= X^a (\underbrace{\partial_a Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^\beta}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + X^\alpha (\underbrace{\partial_\alpha Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} (\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} Y^\beta}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^\beta}_{0} Y^c + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^\beta}_{0} Y^\gamma + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^\beta}_{0} Y^{\bar{\gamma}}) \\ &= X^\alpha (\partial_\alpha Y^\beta + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^\beta Y^\gamma) \\ &= {}^{cc}(\nabla_X Y)^\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.4), (4.5) ve (4.16) kullanılarak $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{HH}\nabla_{\alpha} {}^{cc}Y \right)^{\bar{\beta}} &= {}^{cc}X^a {}^{HH}\nabla_a {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\alpha} {}^{HH}\nabla_{\alpha} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}\nabla_{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&= X^a \underbrace{(\partial_a {}^{cc}Y^{\bar{\beta}})}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\gamma}}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_a^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \\
&\quad + X^{\alpha} \underbrace{(\partial_{\alpha} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}})}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\gamma}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma} - y^{\varepsilon}R_{\varepsilon\alpha\gamma}{}^{\beta}} Y^{\gamma} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \\
&\quad + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}(\partial_{\alpha} (y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}Y^{\beta})) + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^c}_0 + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\gamma}}_{\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}} + \underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha}^{\bar{\beta}} {}^{cc}Y^{\bar{\gamma}}}_0 \\
&= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta}) + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}Y^{\gamma} + y^{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\varepsilon}Y^{\beta} \\
&\quad - y^{\varepsilon}R_{\varepsilon\alpha\gamma}{}^{\beta}X^{\alpha}Y^{\gamma} + X^{\alpha}(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}Y^{\gamma} + y^{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}\partial_{\varepsilon}Y^{\gamma}) \\
&= {}^{cc}(\nabla_X Y)^{\bar{\beta}} - y^{\varepsilon}R_{\varepsilon\alpha\gamma}{}^{\beta}X^{\alpha}Y^{\gamma}
\end{aligned}$$

bulunur. ${}^{cc}(\nabla_X Y) - \gamma(R(\cdot, X)Y)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^b, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlara göre bileşenleri

$${}^{cc}(\nabla_X Y) - \gamma(R(\cdot, X)Y) = \begin{pmatrix} {}^{cc}(\nabla_X Y)^b \\ {}^{cc}(\nabla_X Y)^{\beta} \\ {}^{cc}(\nabla_X Y)^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^{\varepsilon}R_{\varepsilon\alpha\gamma}{}^{\beta}X^{\alpha}Y^{\gamma} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{HH}\nabla_{\alpha} {}^{cc}Y = {}^{cc}(\nabla_X Y) - \gamma(R(\cdot, X)Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

∇ , izdüşümlü lineer konneksiyon ve $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ise $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ izdüşümü ile verilen izdüşümlü vektör alanı olsun. X e göre Lie türevi $L_X \nabla$ olmak üzere

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (4.17)$$

$Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için B_m üzerinde (1,2) tipli tensör alanları tanımlar.

∇ izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere; $X = X^a(x^a, x^{\alpha})\partial_a + X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ izdüşümüyle verilen $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı, $L_X \nabla = 0$ ise B_m manifoldunda bir infinitesimal lineer (affine dönüşüme göre) dönüşüm belirtir ((4.17)'a bakınız (Tanaka 1969; Yano ve Ishihara 1973)).

Teorem 4.3.12. ∇ , B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere keyfi

$X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$$(L_{cc_X}^{HH} \nabla)(^{cc}Y, ^{cc}Z) = ^{cc} \left((L_X \nabla)(^{cc}Y, ^{cc}Z) \right) + \gamma(L_X R)(, Y)Z$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.3.11 , (4.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (L_{cc_X}^{HH} \nabla)(^{cc}Y, ^{cc}Z) &= L_{cc_X} (^{HH} \nabla_{cc_Y} ^{cc}Z) - ^{HH} \nabla_{cc_Y} (L_{cc_X} ^{cc}Z) - ^{HH} \nabla_{[^{cc}X, ^{cc}Y]} ^{cc}Z \\ &= L_{cc_X} [^{cc} \nabla_Y Z - \gamma(R(, Y)Z)] - ^{HH} \nabla_{cc_Y} (L_X Z) - ^{HH} \nabla_{[X, Y]} ^{cc}Z \\ &= [^{cc}X, ^{cc} \nabla_X Y] - [^{cc}X, \gamma(R(, Y)Z)] - ^{cc}(\nabla_Y (L_X Z)) \\ &\quad + \gamma(R(, Y)L_X Z) - ^{cc} \left(\nabla_{[X, Y]} Z \right) + \gamma R(, [X, Y]Z) \\ &= ^{cc} \left(\widetilde{L_X \nabla_X Y} \right) - ^{cc} \left(\widetilde{\nabla_Y (L_X Z)} \right) - ^{cc} \left(\widetilde{\nabla_{[X, Y]} Z} \right) \\ &\quad - \gamma \left(\widetilde{L_X R(, Y)Z} \right) + \gamma \left(\widetilde{R(, Y)L_X Z} \right) + \gamma \left(\widetilde{R(, L_X Y)Z} \right) \\ &= ^{cc} \left(\widetilde{L_X \nabla} \right) \left(^{cc} \widetilde{Y, ^{cc}Z} \right) + \gamma \left(\widetilde{-L_X R(, Y)Z + R(, Y)L_X Z + R(, L_X Y)Z} \right) \\ &= ^{cc} \left(\widetilde{L_X \nabla} \right) \left(^{cc} \widetilde{Y, ^{cc}Z} \right) + \gamma \left(\widetilde{L_X R(, Y)Z} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.4 (0,2) Tipli Tensör Alanının Dikey Liftleri

$G = G_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ ile tanımlı $G \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti

$${}^w G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

bileşenlerine sahiptir. (3.44) kullanılarak ${}^w G_{I'J'} = A_{I'}^I A_{J'}^J ({}^w G_{IJ})$ eşitliği ispatlanabilir. (0,2)

tipli ${}^w G$ tensör alanına $G \in \mathfrak{T}_2^0(M_n)$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti denir.

$Det({}^w G) = 0$ olduğu için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.4.1. $t(B_m)$ yarı-tanjant demet sıradan (trivial) ${}^{vv}G$ metriğine sahiptir.

Teorem 4.4.2. G , B_m üzerinde (0,2) tipli tensör alanı olmak üzere $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ vektör alanları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- i) ${}^{vv}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) = 0$,
- ii) ${}^{vv}G({}^{vv}X, {}^{cc}Y) = 0$,
- iii) ${}^{vv}G({}^{cc}X, {}^{vv}Y) = 0$,
- iv) ${}^{vv}G({}^{cc}X, {}^{cc}Y) = {}^{vv}(G(X, Y))$.

İspat: (i) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(B_m)$ olmak üzere, (4.3) ve (4.18)'den,

$$\begin{aligned}
 {}^{vv}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) &= {}^{vv}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{vv}Y^J \\
 &= {}^{vv}G_{ab} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^b + {}^{vv}G_{a\beta} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^\beta + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &\quad + {}^{vv}G_{ab} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{vv}G_{a\beta} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &\quad + {}^{vv}G_{ab} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{vv}G_{a\beta} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(B_m)$ olmak üzere, (4.3), (4.4) ve (4.5)'den,

$$\begin{aligned}
 {}^{vv}G({}^{vv}X, {}^{cc}Y) &= {}^{vv}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{cc}Y^J \\
 &= {}^{vv}G_{ab} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^b + {}^{vv}G_{a\beta} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^\beta + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
 &\quad + {}^{vv}G_{ab} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^b + {}^{vv}G_{a\beta} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^\beta + {}^{vv}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{\overset{0}{}} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^{\bar{\beta}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underset{0}{{}^w G_{ab}} \underset{0}{{}^v X^{\bar{\alpha}} {}^{cc} Y^b} + \underset{0}{{}^w G_{\alpha\beta}} \underset{0}{{}^v X^{\bar{\alpha}} {}^{cc} Y^\beta} + \underset{0}{{}^w G_{\alpha\bar{\beta}}} \underset{0}{{}^v X^{\bar{\alpha}} {}^{cc} Y^{\bar{\beta}}} \\
& = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{T}_2^0(B_m)$ olmak üzere, (4.3), (4.5) ve (4.18)'den,

$$\begin{aligned}
{}^w G({}^{cc} X, {}^w Y) &= {}^w G_{IJ} {}^{cc} X^I {}^w Y^J \\
&= \underset{0}{{}^v G_{ab}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^w Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\beta}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^w Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{a\bar{\beta}}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^w Y^{\bar{\beta}}} \\
&+ \underset{0}{{}^v G_{ab}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^w Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\beta}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^w Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\bar{\beta}}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^w Y^{\bar{\beta}}} \\
&+ \underset{0}{{}^v G_{\bar{a}b}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^w Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\bar{\alpha}\beta}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^w Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^w Y^{\bar{\beta}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{T}_2^0(B_m)$ olmak üzere, (4.1), (4.3), (4.5) ve (4.18)'den,

$$\begin{aligned}
{}^w G({}^{cc} X, {}^{cc} Y) &= {}^w G_{IJ} {}^{cc} X^I {}^{cc} Y^J \\
&= \underset{0}{{}^v G_{ab}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^{cc} Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\beta}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^{cc} Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{a\bar{\beta}}} {}^{cc} X^a \underset{0}{{}^{cc} Y^{\bar{\beta}}} \\
&+ \underset{0}{{}^v G_{ab}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^{cc} Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\beta}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^{cc} Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{\alpha\bar{\beta}}} {}^{cc} X^\alpha \underset{0}{{}^{cc} Y^{\bar{\beta}}} \\
&+ \underset{0}{{}^v G_{\bar{a}b}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^{cc} Y^b} + \underset{0}{{}^v G_{\bar{\alpha}\beta}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^{cc} Y^\beta} + \underset{0}{{}^v G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}} {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underset{0}{{}^{cc} Y^{\bar{\beta}}} \\
&= G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = {}^w (G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.5 (0,2) Tipli Tensör Alanının Tam Liftleri

$G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$, $G = G_{\alpha\beta}(x^\alpha) dx^\alpha \otimes dx^\beta$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerinde (0,2) tipli bir tensör alanı olmak üzere (x^a, x^α) koordinatlarına göre,

$$G = (G_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta}(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir (Vishnevskii 1985). (0,2) tipli G izdüşümlü tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti

$${}^{cc}G = ({}^{cc}G_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada (4.3) kullanılarak ${}^{cc}G_{I'J'} = A_{I'}^I A_{J'}^J ({}^{cc}G_{IJ})$ eşitliği kolaylıkla gösterilebilir (Vishnevskii 1985).

Burada

$$\text{Det}({}^{cc}G) = 0$$

olduğu için aşağıdaki teoremler yazılır.

Teorem 4.5.1. $t(B_m)$ yarı tanjant demet, ${}^{cc}G$ dejenere metriğine sahiptir (V. Vishnevskii 1985).

Teorem 4.5.2. G , M_n üzerinde tanımlı (0,2) tipli izdüşümlü tensör alanı ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere;

- i) ${}^{cc}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) = 0$,
- ii) ${}^{cc}G({}^{vv}X, {}^{cc}Y) = {}^{vv}(G(X, Y))$,
- iii) ${}^{cc}G({}^{cc}X, {}^{vv}Y) = {}^{vv}(G(X, Y))$,
- iv) ${}^{cc}G({}^{cc}X, {}^{cc}Y) = {}^{cc}(G(X, Y))$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (i) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere, (4.3) ve (4.19)'den,

$$\begin{aligned}
 {}^{cc}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) &= {}^{cc}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{vv}Y^J \\
 &= {}^{cc}G_{ab} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &\quad + {}^{cc}G_{ab} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &\quad + {}^{cc}G_{ab} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere; (4.1), (4.3), (4.5) ve (4.19)'den,

$${}^{cc}G({}^{vv}X, {}^{cc}Y) = {}^{cc}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{cc}Y^J$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{cc}G_{ab} \underset{0}{} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} \underset{0}{} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{} {}^{vv}X^a {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{cc}G_{ab} \underset{0}{} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} \underset{0}{} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{} {}^{vv}X^\alpha {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{cc}G_{a\bar{b}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^b + {}^{cc}G_{\alpha\bar{\beta}} \underset{G_{a\beta}}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}G_{\alpha\bar{\beta}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{cc}Y^{\bar{\beta}} \\
&= G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = {}^{vv}(G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{F}_2^0(M_n)$ olmak üzere; (4.1), (4.3), (4.5) ve (4.19)'den,

$$\begin{aligned}
{}^{cc}G({}^{cc}X, {}^{vv}Y) &= {}^{cc}G_{IJ} {}^{cc}X^I {}^{vv}Y^J \\
&= {}^{cc}G_{ab} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{cc}G_{ab} \underset{0}{} {}^{cc}X^\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} \underset{0}{} {}^{cc}X^\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} \underset{G_{a\beta}}{} {}^{cc}X^\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&+ {}^{cc}G_{a\bar{b}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{cc}G_{\alpha\bar{\beta}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}G_{\alpha\bar{\beta}} \underset{0}{\phantom{X^{\bar{\alpha}}}} {}^{cc}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = {}^{vv}(G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X, Y \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{F}_2^0(M_n)$ olmak üzere; (4.2), (4.3), (4.5) ve (4.19)'den,

$$\begin{aligned}
{}^{cc}G({}^{cc}X, {}^{cc}Y) &= {}^{cc}G_{IJ} {}^{cc}X^I {}^{cc}Y^J \\
&= {}^{cc}G_{ab} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{cc}Y^b + {}^{cc}G_{a\beta} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{cc}Y^\beta + {}^{cc}G_{a\bar{\beta}} \underset{0}{} {}^{cc}X^a {}^{cc}Y^{\bar{\beta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overset{cc}{G}_{ab} \overset{cc}{X}^a \overset{cc}{Y}^b + \overset{cc}{G}_{\alpha\beta} \overset{cc}{X}^\alpha \overset{cc}{Y}^\beta + \overset{cc}{G}_{\alpha\bar{\beta}} \overset{cc}{X}^\alpha \overset{cc}{Y}^{\bar{\beta}} \\
& + \overset{cc}{G}_{\bar{a}b} \overset{cc}{X}^{\bar{a}} \overset{cc}{Y}^b + \overset{cc}{G}_{\bar{\alpha}\beta} \overset{cc}{X}^{\bar{\alpha}} \overset{cc}{Y}^\beta + \overset{cc}{G}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \overset{cc}{X}^{\bar{\alpha}} \overset{cc}{Y}^{\bar{\beta}} \\
& = y^\varepsilon \left(\partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} \right) X^\alpha Y^\beta + G_{\alpha\beta} X^\alpha y^\varepsilon \left(\partial_\varepsilon Y^\beta \right) + G_{\alpha\beta} y^\varepsilon \left(\partial_\varepsilon X^\alpha \right) Y^\beta \\
& = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \left(G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \right) = \overset{cc}{G}(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, (4.18) ve (4.19)'ye göre, $\overset{cc}{G}^*$ ile

$$\overset{cc}{G}^* = \overset{cc}{G} + {}^w\overset{cc}{G}$$

şeklindeki yeni bir (0,2) tipli izdüşümlü tensör alanı tanımlanacak olursa, bu tensör alanı $(X^a, X^\alpha, X^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre

$$\overset{cc}{G}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir.

$\overset{cc}{G}^*$, (0,2) tipli $\overset{cc}{G}$ tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine deforme olmuş tam lifti olarak tanımlanır. (3.44)'den kolaylıkla $\overset{cc}{G}^*_{I'J'} = A_{I'}^I A_{J'}^J (\overset{cc}{G}^*_{IJ})$ olduğu görülür.

İspat: Burada kolaylık adına sadece ${}^{cc}G^*_{\alpha'\beta'}$ bileşenini hesaplırsak (3.44)'den

$$\begin{aligned}
{}^{cc}G^*_{\alpha'\beta'} &= A_{\alpha'}^a A_{\beta'}^b \underbrace{{}^{cc}G^*_{ab}}_0 + A_{\alpha'}^a A_{\beta'}^\beta \underbrace{{}^{cc}G^*_{a\beta}}_0 + A_{\alpha'}^a A_{\beta'}^{\bar{\beta}} \underbrace{{}^{cc}G^*_{a\bar{\beta}}}_0 \\
&\quad + A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^b \underbrace{{}^{cc}G^*_{\alpha b}}_0 + A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta \underbrace{{}^{cc}G^*_{\alpha\beta}}_{A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}} + A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^{\bar{\beta}} \underbrace{{}^{cc}G^*_{\alpha\bar{\beta}}}_{A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^{\bar{\beta}} y^{\varepsilon'} G_{\alpha\beta}} \\
&\quad + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}} A_{\beta'}^b \underbrace{{}^{cc}G^*_{\bar{\alpha} b}}_0 + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}} A_{\beta'}^\beta \underbrace{{}^{cc}G^*_{\bar{\alpha}\beta}}_{A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon'} A_{\beta'}^\alpha G_{\alpha\beta}} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} \underbrace{{}^{cc}G^*_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_0 \\
&= A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta (y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} G_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}) + y^{\varepsilon'} (\partial_{\varepsilon'} A_{\beta'}^\beta) A_{\alpha'}^\alpha G_{\alpha\beta} + y^{\varepsilon'} (\partial_{\varepsilon'} A_{\alpha'}^\alpha) A_{\beta'}^\beta G_{\alpha\beta} \\
&= A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta (y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} G_{\alpha\beta}) + A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta G_{\alpha\beta} + y^{\varepsilon'} (\partial_{\varepsilon'} A_{\beta'}^\beta) A_{\alpha'}^\alpha G_{\alpha\beta} + y^{\varepsilon'} (\partial_{\varepsilon'} A_{\alpha'}^\alpha) A_{\beta'}^\beta G_{\alpha\beta} \\
&= y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} (A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta G_{\alpha\beta}) + G_{\alpha'\beta'} = y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} G_{\alpha'\beta'} + G_{\alpha'\beta'}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde kolaylıkla ${}^{cc}G^*_{I'J'}$ nin diğer bileşenleri de bulunabilir.

Dolayısıyla,

$${}^{cc}G^*_{I'J'} = A_{I'}^I A_{J'}^J ({}^{cc}G^*_{IJ})$$

elde edilir. Buradan

$$Det({}^{cc}G^*) = 0$$

olur.

Teorem 4.5.3. $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti dejenere deforme olmuş ${}^{cc}G^*$ metriğine sahiptir.

4.6 (0,2) Tipli Tensör Alanının Yatay Liftleri

$S \in \mathfrak{S}_3^0(B_m)$ için, (0,2) tipli γS tensör alanı $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^{\bar{\alpha}})$ ve $(x^b, x^\beta, \bar{x}^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre

$$\gamma S = (\gamma S_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon S_{\varepsilon\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada $(\gamma S)' = A_I^I A_J^J (\gamma S)$ olduğu (3.44) yardımı ile kolaylıkla gösterilebilir.

B_m in U komşuluğunda $G_{\alpha\beta}$, $G = G_{\alpha\beta} (x^\alpha) dx^\alpha \otimes dx^\beta$ lokal bileşenlerine sahip olan $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ izdüşümlü tensör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demete ${}^{HH}G$ yatay lifti $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^{\bar{\alpha}})$ ve $(x^b, x^\beta, \bar{x}^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$${}^{HH}G = {}^{cc}G - \nabla_\gamma G = {}^{cc}G - \gamma[\nabla G] \quad (4.21)$$

ile tanımlıdır. Buradaki (0,2) tipli $\gamma[\nabla G]$ tensör alanı

$$\gamma[\nabla G] = y^\varepsilon \nabla_\varepsilon G_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (4.22)$$

ile tanımlıdır.

(4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) kullanılarak ${}^{HH}G$ yatay liftinin $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde

$${}^{HH}G = ({}^{HH}G_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\sigma\beta} + y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\alpha\sigma} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür. Burada $G_{\alpha\beta}$ lar $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ tensör alanının, $\Gamma_\varepsilon^\sigma$ ise $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerindeki ∇ nin bileşenleridir. Γ_β^α lar ise (4.6)'daki gibi tanımlıdır.

İspat: (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) kullanılarak

$$\begin{aligned} {}^{HH}G &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\sigma\beta} + y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\alpha\sigma} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} - y^\varepsilon (\partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} - \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\sigma\beta} - \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\alpha\sigma}) & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon G_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta} \\ 0 & G_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \nabla_\varepsilon G_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^{cc}G - \gamma[\nabla G] \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.6.1. G , M_n de (0,2) tipli izdüşümlü bir tensör alanı ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

- i) ${}^{HH}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) = 0$,
- ii) ${}^{HH}G({}^{HH}X, {}^{HH}Y) = {}^{HH}(G(X, Y))$,
- iii) ${}^{HH}G({}^{vv}X, {}^{HH}Y) = {}^{vv}(G(X, Y))$,
- iv) ${}^{HH}G({}^{HH}X, {}^{vv}Y) = {}^{vv}(G(X, Y))$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (i) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere, (4.3) ve (4.23)'dan,

$$\begin{aligned}
{}^{HH}G({}^{vv}X, {}^{vv}Y) &= {}^{cc}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{vv}Y^J \\
&= \underbrace{{}^{HH}G_{ab}}_0 {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{vv}X^a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{ab}}_0 {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{vv}X^\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{b}}}_0 {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere, (4.10) ve (4.23)'dan,

$$\begin{aligned}
{}^{HH}G({}^{HH}X, {}^{HH}Y) &= {}^{HH}G_{IJ} {}^{HH}X^I {}^{HH}Y^J \\
&= \underbrace{{}^{HH}G_{ab}}_0 {}^{HH}X^a {}^{HH}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{HH}X^a {}^{HH}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{HH}X^a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{ab}}_0 {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{HH}X^\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{b}}}_0 {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&= (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\sigma\beta} + y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\sigma G_{\alpha\sigma}) X^\alpha Y^\beta + G_{\alpha\beta} X^\alpha (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\sigma) + G_{\alpha\beta} Y^\beta (-y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\sigma) \\
&= {}^{cc}(G(X, Y)) - \gamma[\nabla(G(X, Y))] \\
&= {}^{HH}(G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere; (4.1), (4.3), (4.10) ve (4.23) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
{}^{HH}G({}^{vv}X, {}^{HH}Y) &= {}^{HH}G_{IJ} {}^{vv}X^I {}^{HH}Y^J \\
&= {}^{HH}G_{ab} {}^{vv}X^a {}^{HH}Y^b + {}^{HH}G_{a\beta} {}^{vv}X^a {}^{HH}Y^\beta + {}^{HH}G_{a\bar{\beta}} {}^{vv}X^a {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + {}^{HH}G_{\alpha b} {}^{vv}X^\alpha {}^{HH}Y^b + {}^{HH}G_{\alpha\beta} {}^{vv}X^\alpha {}^{HH}Y^\beta + {}^{HH}G_{\alpha\bar{\beta}} {}^{vv}X^\alpha {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{\bar{\alpha}b}}_0 {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^b + {}^{HH}G_{\bar{\alpha}\beta} {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_0 {}^{vv}X^{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&= G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = {}^{vv}(G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ ve $G \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ olmak üzere; (4.1), (4.3), (4.10) ve (4.23) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
{}^{HH}G({}^{HH}X, {}^{vv}Y) &= {}^{HH}G_{IJ} {}^{HH}X^I {}^{vv}Y^J \\
&= \underbrace{{}^{HH}G_{ab}}_0 {}^{HH}X^a {}^{vv}Y^b + \underbrace{{}^{HH}G_{a\beta}}_0 {}^{HH}X^a {}^{vv}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{a\bar{\beta}}}_0 {}^{HH}X^a {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{\alpha b}}_0 {}^{HH}X^\alpha {}^{vv}Y^b + {}^{HH}G_{\alpha\beta} {}^{HH}X^\alpha {}^{vv}Y^\beta + {}^{HH}G_{\alpha\bar{\beta}} {}^{HH}X^\alpha {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad + \underbrace{{}^{HH}G_{\bar{\alpha}b}}_0 {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^b + {}^{HH}G_{\bar{\alpha}\beta} {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^\beta + \underbrace{{}^{HH}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}_0 {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} {}^{vv}Y^{\bar{\beta}} \\
&= G_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = {}^{vv}(G(X, Y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.7 Kotanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Yarı-tanjant Demet

M_n , C^∞ sınıfından n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $T^*(M_n)$, $\pi_1: T^*(M_n) \rightarrow M_n$ doğal izdüşümü (submersion) ile tanımlanan kotanjant demet olsun. Bu demette $\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, n; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, 2n; i, j, \dots = 1, \dots, 2n$ olmak üzere, $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemine bakalım, burada x^α 'lar M_n 'nin lokal koordinatları, $x^{\bar{\alpha}} = p_\alpha$ 'lar ise, $T^*(M_n)$ kotanjant demetinin fibre koordinatlarıdır. $(x^{\bar{\alpha}'}, x^{\alpha'})$, $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki bir diğer yerel koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} p_\beta, \\ x^{\alpha'} = x^\alpha(x^\beta). \end{cases} \quad (4.24)$$

dönüşümü yazılır. (4.24)'de belirtilen dönüşümün Jakobi matrisi

$$(A_j^{i'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} A_{\alpha'}^\beta & p_\sigma A_{\beta'}^{\beta'} A_{\beta'\alpha'}^\sigma \\ 0 & A_{\beta'}^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Burada

$$A_{\alpha'}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}, \quad A_{\beta'\alpha'}^\sigma = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}}$$

eşitlikleri geçerlidir (Salimov ve Yıldırım 2014).

$T_p(M_n)$ ($p = \pi_1(p)$, $p = (x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha) \in T^*(M_n)$) p noktasındaki tanjant uzayı olsun. x^α 'lar ($x^\alpha = dx^\alpha(x^\beta)$), $T_p(M_n)$ 'in $\{\partial_\alpha\}$ ($\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$) doğal çatısına göre bileşenleri olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde lokal koordinatları $(x^I) = (x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$, $(x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha; I, J, \dots = 1, \dots, 3n$

) olan kotanjant demet izdüşümü ile tanımlı tanjant demetinin, $t(M_n)$ pull-back demeti elde edilir. $t(M_n)$ pull-back demetinin boyutu $\dim(t(M_n)) = 3n$ olmaktadır.

$t(M_n)$ pull-back demeti, M_n üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi: (\bar{x}^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, \bar{x}^{\bar{\alpha}}) \rightarrow (x^{\alpha})$ şeklinde tanımlı $\pi: t(M_n) \rightarrow M_n$ izdüşümüne sahiptir. Eğer, $\pi_2: (\bar{x}^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, \bar{x}^{\bar{\alpha}}) \rightarrow (\bar{x}^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha})$ ile, $\pi_2: t(M_n) \rightarrow T^*(M_n)$ dönüşümü ve $\pi_1: T^*(M_n) \rightarrow M_n$ izdüşümüyle tanjant demetinin pull-back demeti tanımlanacak olursa, $t(M_n)$; M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur (Steenrod 1951; Pontryagin 1962; Lawson ve Michelsohn 1989; Salimov ve Yıldırım 2014). Buradaki izdüşümü dönüşümleri arasında $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ eşitliği yazılabilir (Yıldırım ve Salimov 2014b). Böylece $(t(M_n), \pi_1 \circ \pi_2)$ kompozit demeti veya step-like demeti tanımlar (Ostianu 1974; Poor 1981). Burada keyfi $\pi_1: M_n \rightarrow B_m$ fibre demeti yerine $\pi_1: T^*(M_n) \rightarrow M_n$ kotanjant demet alınarak yarı-tanjant demetin özel bir sınıfı tanımlanmıştır.

$T^*(M_n)$ 'nin lokal koordinatlarının (4.24)'e göre, $t(M_n)$ üzerinde belirttiği koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} \bar{x}^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} p_{\beta}, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\beta}), \\ \bar{x}^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} y^{\beta}, \end{cases} \quad (4.25)$$

şeklindeir. (4.25) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\bar{A} = (A_J^{I'}) = \begin{pmatrix} A_{\alpha'}^{\beta} & p_{\sigma} A_{\beta}^{\beta'} A_{\beta'\alpha'}^{\sigma} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\epsilon}^{\alpha'} y^{\epsilon} & A_{\beta}^{\alpha'} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

biçimindedir. Burada

$$A_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \quad A_{\alpha'}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}, \quad A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}}, \quad A_{\beta'\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}}$$

şeklindedir. (4.26)'de belirtilen matris için

$$\text{Det}(A_{\beta}^{\alpha'}) \neq 0$$

olduğundan $\text{Det}\bar{A} \neq 0$ 'dır. $F(M_n)$, M_n üzerindeki C^{∞} sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, M_n 'deki (p, q) tipli tüm tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\mathfrak{S}_q^p(M_n)$ ile gösterilir (Salimov ve Yıldırım 2014).

4.8 Dikey Liftler

$X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$, $X = X^{\alpha} \partial_{\alpha}$ olmak üzere

$${}^v X = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^v X^{\alpha} \\ X^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

koordinat bileşenleri ve (4.26)'den ${}^v X' = \bar{A}({}^v X)$ eşitliği elde edilir. Burada ${}^v X$ vektör alanı, X in $t(M_n)$ üzerindeki dikey liftidir.

$\omega = \omega_{\alpha} dx^{\alpha}$ lokal koordinatlarıyla M_n üzerinde verilen ω , 1-form olmak üzere

$${}^v \omega = (0, \omega_{\alpha}, 0), \quad (4.28)$$

koordinat bileşenleri ve (4.26)'den $({}^v \omega)' = (\bar{A})^{-1}({}^v \omega)$ eşitliği elde edilir. Burada ${}^v \omega$ kovektör alanı, ω nın $t(M_n)$ üzerindeki dikey liftidir. Ayrıca $(\bar{A})^{-1} = (A_{j'}^I)$ ile $\bar{A}$ matrisinin tersi gösterilmiştir.

4.9 γ – Operator

Herhangi $F \in \mathfrak{S}_1^1(t^*(M_n))$ için (4.26) dikkate alınarak $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ eşitliği kanıtlanabilir. γF şeklinde tanımlanan vektör alanı

$$\gamma F = (\gamma F^A) = \begin{pmatrix} -p_\sigma F_\alpha^\sigma \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

bileşenlerine sahiptir. Koordinatları ise $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ dir.

$\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ ve $F \in \mathfrak{S}_1^1(t^*(M_n))$ olmak üzere

$${}^{vv}\omega(\gamma F) = 0$$

dir.

$T \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$ olmak üzere

$$\gamma T = (\gamma T_B^A) = \begin{pmatrix} 0 & -p_\sigma T_{\beta\alpha}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon T_{\varepsilon\beta}^\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

eşitliğinden ve (4.26)'den $\gamma T_{B'}^{A'} = A_A^{A'} A_{B'}^B \gamma T_B^A$ ifadesi kolaylıkla elde edilir. Burada $\bar{A}$ ters matrisi $(\bar{A})^{-1} = (A_{B'}^B)$ dir.

$X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ ve $T \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$ olmak üzere

$$(\gamma T)^{vv} X = 0$$

elde edilir.

4.10 Vektör Alanının Tam Lifti

$T^*(M_n)$ üzerinde $f = f(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha)$ bir fonksiyon olsun. $t(M_n)$ üzerinde tanımlanan ${}^{cc}f$

fonksiyonunun $t(M_n)$ üzerindeki tam lifti

$${}^{cc}f = (\iota(df)) = x^{\bar{\beta}} \partial_{\beta} f = y^{\beta} \partial_{\beta} f$$

şeklindedir.

$X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$, $X = X^{\alpha} \partial_{\alpha}$ olmak üzere, X in ${}^c X$ kotanjant demetteki tam lifti

${}^c X = X^{\alpha} \partial_{\alpha} - p_{\beta} (\partial_{\alpha} X^{\beta}) \partial_{\bar{\alpha}}$ biçiminde tanımlanır (Yano ve Ishihara 1973).

${}^c X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$, ${}^{cc} X$ nin $t(M_n)$ üzerindeki tam lifti;

$${}^{cc} X = \begin{pmatrix} {}^c X^{\alpha} \\ X^{\alpha} \\ y^{\epsilon} \partial_{\epsilon} X^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

koordinat bileşenlerinden ve (4.26)'den ${}^{cc} X' = \bar{A}({}^{cc} X)$ elde edilir.

Teorem 4.10.1. $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$, herhangi bir $F \in \mathfrak{S}_1^1(t^*(M_n))$ ve L_X operatörü X in Lie türevleri olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$i) [{}^{cc} X, {}^{cc} Y] = {}^{cc} [X, Y] \text{ (i.e. } L_{{}^{cc} X} {}^{cc} Y = {}^{cc} (L_X Y)),$$

$$ii) [{}^{cc} X, {}^{vv} Y] = {}^{vv} [X, Y],$$

$$iii) [{}^{vv} X, {}^{vv} Y] = 0,$$

$$iv) [{}^{cc} X, \gamma F] = \gamma (L_X F)$$

İspat: (i) $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ ve $[{}^{cc} X, {}^{cc} Y]$ nin $\begin{pmatrix} [{}^{cc} X, {}^{cc} Y]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{cc} X, {}^{cc} Y]^{\beta} \\ [{}^{cc} X, {}^{cc} Y]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$ bileşenleri $t(M_n)$ üzerindeki

$(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$ koordinatları olmak üzere

$$[{}^{cc} X, {}^{cc} Y]^J = ({}^{cc} X)^I \partial_I ({}^{cc} Y)^J - ({}^{cc} Y)^I \partial_I ({}^{cc} X)^J$$

elde edilir.

Birinci olarak $J = \bar{\beta}$ ve (4.30) den ;

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}}}_0 + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\bar{\beta}}}_0 \\
&\quad - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 - ({}^{cc}Y)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 \\
&= p_{\varepsilon} \partial_{\alpha} X^{\varepsilon} (\partial_{\beta} Y^{\alpha}) - X^{\alpha} \partial_{\alpha} p_{\varepsilon} (\partial_{\beta} Y^{\varepsilon}) - p_{\varepsilon} \partial_{\alpha} Y^{\varepsilon} (\partial_{\beta} X^{\alpha}) + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} p_{\varepsilon} (\partial_{\beta} X^{\varepsilon}) \\
&= p_{\varepsilon} (\partial_{\beta} Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\varepsilon} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} Y^{\varepsilon} - \partial_{\beta} X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\varepsilon} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} X^{\varepsilon}) \\
&= -p_{\varepsilon} (\partial_{\beta} \underbrace{(X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\varepsilon} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\varepsilon})}_{[X, Y]^{\varepsilon}}) \\
&= -p_{\varepsilon} (\partial_{\beta} [X, Y]^{\varepsilon})
\end{aligned}$$

bulunur.

İkinci olarak $J = \beta$ ve (4.30) den ;

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\beta} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\beta} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\beta} \\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\beta}}_0 + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}Y)^{\beta} + ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\beta}}_0 \\
&\quad - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\beta}}_0 - ({}^{cc}Y)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\beta} - ({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\beta}}_0 \\
&= ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}Y)^{\beta} - ({}^{cc}Y)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\beta} \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} = [X, Y]^{\beta}
\end{aligned}$$

bulunur.

Üçüncü olarak $J = \bar{\bar{\beta}}$ ve (4.30) den;

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} = ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\beta}}} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}$$

$$\begin{aligned}
&= (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{Y})^{\bar{\beta}}}_0 + (\overset{cc}{X})^{\alpha} \partial_{\alpha} (\overset{cc}{Y})^{\bar{\beta}} + (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{Y})^{\bar{\beta}} \\
&\quad - (\overset{cc}{Y})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}}}_0 - (\overset{cc}{Y})^{\alpha} \partial_{\alpha} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}} - (\overset{cc}{Y})^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}} \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} (y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} Y^{\beta}) + y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}} \partial_{\sigma} Y^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} (y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta}) - y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} Y^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}} \partial_{\sigma} X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon} X^{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\varepsilon} Y^{\beta} + y^{\varepsilon} (\partial_{\varepsilon} X^{\sigma}) (\partial_{\sigma} Y^{\beta}) - y^{\varepsilon} Y^{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\varepsilon} X^{\beta} - y^{\varepsilon} (\partial_{\varepsilon} Y^{\sigma}) (\partial_{\sigma} X^{\beta}) \\
&= y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} [X, Y]^{\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan ${}^{\text{cc}}[X, Y]$ bileşenleri $t(M_n)$ üzerindeki koordinatları $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ olmak üzere

$${}^{\text{cc}}[X, Y] = \begin{pmatrix} -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}[X, Y]^{\varepsilon}) \\ [X, Y]^{\beta} \\ y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} [X, Y]^{\beta} \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $[{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{cc}}Y] = {}^{\text{cc}}[X, Y]$ eşitliği elde edilir.

$$(ii) \quad X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(T^*(M_n)) \quad \text{ve} \quad [{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y] \quad \text{nin} \quad \begin{pmatrix} [{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y]^{\beta} \\ [{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} \quad \text{bileşenleri} \quad t(M_n) \quad \text{üzerindeki}$$

$(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatları olmak üzere

$$[{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y]^J = ({}^{\text{cc}}X)^I \partial_I ({}^{\text{vv}}Y)^J - ({}^{\text{vv}}Y)^I \partial_I ({}^{\text{cc}}X)^J$$

dir.

Birinci olarak $J = \bar{\beta}$, (4.27) ve (4.30) den;

$$[{}^{\text{cc}}X, {}^{\text{vv}}Y]^{\bar{\beta}} = ({}^{\text{cc}}X)^I \partial_I \underbrace{({}^{\text{vv}}Y)^{\bar{\beta}}}_0 - ({}^{\text{vv}}Y)^I \partial_I ({}^{\text{cc}}X)^{\bar{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}}}_{\bar{0}} \partial_{\bar{\alpha}} (\bar{c} X)^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\alpha}}_{\bar{0}} \partial_{\alpha} (\bar{c} X)^{\bar{\beta}} - (\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{c} X)^{\bar{\beta}}}_{-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta} X^{\varepsilon})} \\
&= (\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha} X^{\varepsilon}) = 0 \\
&\quad 0
\end{aligned}$$

bulunur.

İkinci olarak $J = \beta$, (4.27) ve (4.30) den; $[\bar{c} X, \bar{\nu} Y]^{\beta} = (\bar{c} X)^I \partial_I \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\beta}}_{\bar{0}} - (\bar{\nu} Y)^I \partial_I (\bar{c} X)^{\beta}$

$$\begin{aligned}
&= -\underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}}}_{\bar{0}} \partial_{\bar{\alpha}} (\bar{c} X)^{\beta} - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\alpha}}_{\bar{0}} \partial_{\alpha} (\bar{c} X)^{\beta} - (\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{c} X)^{\beta}}_{X^{\beta}} \\
&= -(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} X^{\beta} = 0 \\
&\quad 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Üçüncü olarak $J = \bar{\beta}$, (4.27) ve (4.30) den;

$$\begin{aligned}
[\bar{c} X, \bar{\nu} Y]^{\bar{\beta}} &= (\bar{c} X)^I \partial_I (\bar{\nu} Y)^{\bar{\beta}} - (\bar{\nu} Y)^I \partial_I (\bar{c} X)^{\bar{\beta}} \\
&= (\bar{c} X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\beta}}}_{Y^{\beta}} + \underbrace{(\bar{c} X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}} \partial_{\alpha} \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\beta}}}_{Y^{\beta}} + (\bar{c} X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\beta}}}_{Y^{\beta}} \\
&\quad - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}}}_{\bar{0}} \partial_{\bar{\alpha}} (\bar{c} X)^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\alpha}}_{\bar{0}} \partial_{\alpha} (\bar{c} X)^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}}}_{Y^{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{c} X)^{\bar{\beta}}}_{y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta}} \\
&= \underbrace{(\bar{c} X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}} \partial_{\alpha} \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\beta}}}_{Y^{\beta}} - \underbrace{(\bar{\nu} Y)^{\bar{\alpha}}}_{Y^{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\bar{c} X)^{\bar{\beta}}}_{y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta}} \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta} \\
&\quad \delta_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} \\
&= [X, Y]^{\beta}
\end{aligned}$$

Diğer taraftan $[X, Y]$ bileşenlerinin ${}^{\nu\nu}[X, Y]$ dikey lifti $t(M_n)$ üzerindeki koordinatları

$(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$ olmak üzere

$${}^v[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X, Y]^\beta \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $[{}^{cc}X, {}^vY] = {}^v[X, Y]$ eşitliği elde edilir.

$$(iii) \quad X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(T^*(M_n)) \quad \text{ve} \quad [{}^vX, {}^vY] \quad \text{nin} \quad \begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^vY]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{cc}X, {}^vY]^\beta \\ [{}^{cc}X, {}^vY]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} \quad \text{bileşenleri} \quad t(M_n) \quad \text{üzerindeki}$$

$(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatları olmak üzere

$$[{}^vX, {}^vY]^J = ({}^vX)^I \partial_I ({}^vY)^J - ({}^vY)^I \partial_I ({}^vX)^J$$

dir.

Birinci olarak $J = \bar{\beta}$ ve (4.27) den;

$$[{}^vX, {}^vY]^{\bar{\beta}} = ({}^vX)^I \partial_I \underbrace{({}^vY)^{\bar{\beta}}}_0 - ({}^vY)^I \partial_I \underbrace{({}^vX)^{\bar{\beta}}}_0 = 0$$

elde edilir.

İkinci olarak $J = \beta$ ve (4.27) den;

$$[{}^vX, {}^vY]^\beta = ({}^vX)^I \partial_I \underbrace{({}^vY)^\beta}_0 - ({}^vY)^I \partial_I \underbrace{({}^vX)^\beta}_0 = 0$$

bulunur.

Üçüncü olarak $J = \bar{\bar{\beta}}$, (4.27) ve Teorem 4.10.1'in (iii) maddesinden;

$$\begin{aligned} [{}^vX, {}^vY]^{\bar{\bar{\beta}}} &= ({}^vX)^I \partial_I ({}^vY)^{\bar{\bar{\beta}}} - ({}^vY)^I \partial_I ({}^vX)^{\bar{\bar{\beta}}} \\ &= \underbrace{({}^vX)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{({}^vY)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{Y^{\bar{\beta}}}}_0 + \underbrace{({}^vX)^\alpha \partial_\alpha \underbrace{({}^vY)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{Y^{\bar{\beta}}}}_0 + \underbrace{({}^vX)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{({}^vY)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{Y^{\bar{\beta}}}}_0 \\ &\quad - \underbrace{({}^vY)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{({}^vX)^{\bar{\bar{\beta}}}}_0}_0 - \underbrace{({}^vY)^\alpha \partial_\alpha \underbrace{({}^vX)^{\bar{\bar{\beta}}}}_0}_{Y^\alpha} - \underbrace{({}^vY)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{({}^vX)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{X^\beta}}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$(iv) \quad F \in \mathfrak{S}_1^1(T^*(M_n)), \quad X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n)) \quad \text{ve} \quad [{}^{cc}X, \gamma F] \quad \text{nin} \quad \begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\beta} \\ [{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} \quad \text{bileşenleri} \quad t(M_n)$$

üzerindeki $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatları olmak üzere

$$[{}^{cc}X, \gamma F]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^J - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

dir.

Birinci olarak $J = \bar{\beta}$, (4.29) ve (4.30) den;

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, \gamma F]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^{\bar{\beta}} - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\ &= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} (\gamma F)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 \\ &\quad - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 - (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_0 \\ &= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} (\gamma F)^{\bar{\beta}} - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\ &= p_{\sigma} (\partial_{\alpha} X^{\sigma}) \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} p_{\sigma}}_{\delta_{\sigma}^{\alpha}} F_{\beta}^{\sigma} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} p_{\sigma} F_{\beta}^{\sigma} - p_{\sigma} F_{\alpha}^{\sigma} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} p_{\sigma}}_{\delta_{\sigma}^{\alpha}} (\partial_{\beta} X^{\sigma}) \\ &= p_{\sigma} (\partial_{\alpha} X^{\sigma}) F_{\beta}^{\alpha} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} p_{\sigma} F_{\beta}^{\sigma} - p_{\sigma} F_{\alpha}^{\sigma} (\partial_{\beta} X^{\alpha}) \\ &= -p_{\sigma} (X^{\alpha} \partial_{\alpha} F_{\beta}^{\sigma} - \partial_{\alpha} X^{\sigma} F_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta} X^{\alpha} F_{\alpha}^{\sigma}) \\ &= -p_{\sigma} (L_X F)_{\beta}^{\sigma} \end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci olarak $J = \beta$, (4.29) ve (4.30) den;

$$[{}^{cc}X, \gamma F]^{\beta} = ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^{\beta} - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\beta}$$

$$\begin{aligned}
&= (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\beta}}_0 + (\overset{cc}{X})^{\alpha} \underbrace{\partial_{\alpha} (\gamma F)^{\beta}}_0 + (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\beta}}_0 \\
&\quad - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\beta}}_0 - (\gamma F)^{\alpha} \underbrace{\partial_{\alpha} (\overset{cc}{X})^{\beta}}_0 - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\beta}}_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Üçüncü olarak $J = \bar{\bar{\beta}}$, (4.29) ve (4.30) den;

$$\begin{aligned}
[\overset{cc}{X}, \gamma F]^{\bar{\beta}} &= (\overset{cc}{X})^I \partial_I (\gamma F)^{\bar{\beta}} - (\gamma F)^I \partial_I (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}} \\
&= (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 + (\overset{cc}{X})^{\alpha} \underbrace{\partial_{\alpha} (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 + (\overset{cc}{X})^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^{\bar{\beta}}}_0 \\
&\quad - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}}}_0 - (\gamma F)^{\alpha} \underbrace{\partial_{\alpha} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}}}_0 - (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (\overset{cc}{X})^{\bar{\beta}}}_0 \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} y^{\varepsilon} F_{\varepsilon}^{\beta} + y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}} F_{\varepsilon}^{\beta} - y^{\varepsilon} F_{\varepsilon}^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}} \partial_{\varepsilon} X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon} X^{\alpha} \partial_{\alpha} F_{\varepsilon}^{\beta} + y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha} F_{\alpha}^{\beta} - y^{\varepsilon} F_{\varepsilon}^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha} F_{\alpha}^{\beta} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} F_{\varepsilon}^{\beta} - F_{\varepsilon}^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} \right) \\
&= y^{\varepsilon} (L_X F)_{\varepsilon}^{\beta}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\gamma(L_X F)$ bileşenlerinin $t(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatları

$$\gamma(L_X F) = \begin{pmatrix} -p_{\sigma}(L_X F)_{\beta}^{\sigma} \\ 0 \\ y^{\varepsilon} (L_X F)_{\varepsilon}^{\beta} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.11 (1,1) Tipli Tensör Alanlarının Tam Lifti

$F \in \mathfrak{S}_1^1(T^*(M_n))$, $F = F_\beta^\alpha \partial_\alpha \otimes dx^\beta$ izdüşümü ile verilen afinor alanı ve F_β^α , M_n nin U komşuluğundaki F afinor alanının lokal koordinatları olmak üzere (4.26) kullanılarak ${}^{cc}F_{J'}^{I'} = A_{I'}^{I'} A_{J'}^{J'} {}^{cc}F_J^I$ eşitliği kolaylıkla elde edilir. Burada F afinor alanının $t(M_n)$ demetine tam lifti olan ${}^{cc}F$ afinor alanının $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$${}^{cc}F = ({}^{cc}F_J^I) = \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

ile tanımlıdır.

İspat: Burada kolaylık adına sadece ${}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'}$ bileşeni hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} {}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'} &= A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\alpha}} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\beta} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\alpha}} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\bar{\beta}}} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\alpha}} \\ &\quad + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} {}^{cc}F_{\beta}^{\alpha} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\beta} {}^{cc}F_{\beta}^{\alpha} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\bar{\beta}}} {}^{cc}F_{\beta}^{\alpha} \\ &\quad + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\bar{\alpha}}} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\beta} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\bar{\alpha}}} + A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\bar{\beta}}} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\bar{\alpha}}} \\ &= A_{\alpha'}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\alpha}} = A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} F_{\alpha}^{\beta} = F_{\alpha'}^{\beta'} \end{aligned}$$

sonuç olarak ${}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'} = F_{\alpha'}^{\beta'}$ eşitliğine ulaşılır. ${}^{cc}F_{J'}^{I'}$ tam liftinin diğer koordinat bileşenleri de benzer şekilde bulunabilir.

Teorem 4.11.1. $T^*(M_n)$ üzerinde tanımlı F ve G afinor alanları ile $X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı için

$$i) {}^{cc}F({}^{cc}X) = {}^{cc}(FX) - \gamma(L_X F) + {}^{vv}(\gamma(L_X F)),$$

$$ii) {}^{cc}F({}^{vv}X) = {}^{vv}(F \circ X),$$

$$iii) {}^{cc}F(\gamma G) = \gamma(F \circ G).$$

eşitlikleri bulunmaktadır.

İspat: (i) $X \in \mathfrak{I}_0^1(T^*(M_n))$ ve $F \in \mathfrak{I}_1^1(T^*(M_n))$ olmak üzere (4.27), (4.30) ve (4.31) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}F^{cc}X &= \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) \\ X^\beta \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon)F_\alpha^\beta + p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma)X^\beta \\ F_\beta^\alpha X^\beta \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha X^\beta + F_\beta^\alpha y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon)F_\alpha^\beta + p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma)X^\beta \\ (FX)^\alpha \\ F_\beta^\alpha y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta + y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha X^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p_\sigma \partial_\alpha (FX)^\sigma \\ (FX)^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon (FX)^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underbrace{p_\sigma(X^\beta \partial_\beta F_\alpha^\sigma - (\partial_\alpha X^\beta)F_\beta^\sigma - (\partial_\beta X^\sigma)F_\alpha^\beta)}_{p_\sigma(L_X F)_\alpha^\sigma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} -p_\sigma \partial_\alpha (FX)^\sigma \\ (FX)^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon (FX)^\alpha \end{pmatrix}}_{{}^{cc}(FX)} - \underbrace{\begin{pmatrix} -p_\sigma(L_X F)_\alpha^\sigma \\ 0 \\ y^\varepsilon (L_X F)_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix}}_{\gamma(L_X F)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon (L_X F)_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix}}_{{}^{vv}(\gamma(L_X F))} = {}^{cc}(FX) - \gamma(L_X F) + {}^{vv}(\gamma(L_X F)),
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X \in \mathfrak{I}_0^1(T^*(M_n))$ ve $F \in \mathfrak{I}_1^1(T^*(M_n))$ olmak üzere (4.27) ve (4.31) kullanılarak

$${}^{cc}F^{vv}X = \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_\beta^\alpha X^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (F \circ X)^\alpha \end{pmatrix} = {}^{vv} (F \circ X),$$

eşitliği elde edilir.

(iii) $F, G \in \mathfrak{T}_1^1(T^*(M_n))$ olmak üzere, (4.29) ve (4.31) kullanılarak

$$\begin{aligned} {}^{cc}F(\gamma G) &= \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_\sigma G_\beta^\sigma \\ 0 \\ y^\varepsilon G_\varepsilon^\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p_\sigma F_\alpha^\beta G_\beta^\sigma \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\beta^\alpha G_\varepsilon^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_\sigma (F \circ G)_\alpha^\sigma \\ 0 \\ y^\varepsilon (F \circ G)_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \\ &= \gamma(F \circ G) \end{aligned}$$

bulunur.

4.12 Vektör Alanlarının Yatay Lifti

$X \in \mathfrak{T}_0^1(T^*(M_n))$, $X = X^\alpha \partial_\alpha$ olmak üzere X vektör alanının $t(M_n)$ üzerine ${}^{HH}X$ yatay lifti

$${}^{HH}X = {}^{cc}X - \gamma(\nabla X)$$

ile tanımlıdır. Burada ∇ , diferansiyellenebilir M_n manifoldundaki simetrik afin konneksiyonudur. ${}^{cc}X$ ve $\gamma(\nabla X)$ vektör alanlarının $t(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$${}^{cc}X = ({}^{cc}X^A) = \begin{pmatrix} -p_\varepsilon(\partial_\alpha X^\varepsilon) \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(\nabla X) = (\gamma(\nabla X)^A) = \begin{pmatrix} -p_\varepsilon(\nabla_\alpha X^\varepsilon) \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

ile tanımlıdır.

X^ε vektör alanının $\nabla_\alpha X^\varepsilon$ kovaryant türevi

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta \alpha}^\varepsilon$$

şeklinde tanımlıdır.

$t(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre X vektör alanının ${}^{HH}X$ yatay lifti

$${}^{HH}X = ({}^{HH}X^A) = \begin{pmatrix} X^\beta \Gamma_{\beta \alpha}^\alpha \\ X^\alpha \\ -\Gamma_{\beta}^\alpha X^\beta \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_{\beta}^\alpha = y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon \beta}^\alpha, \Gamma_{\beta \alpha} = p_\varepsilon \Gamma_{\beta}^\varepsilon \quad (4.33)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 4.12.1. Keyfi $X, Y \in \mathfrak{Z}_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanları için,

$$i) [{}^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X, Y] - \gamma R(X, Y),$$

$$ii) [{}^{HH}X, {}^vY] = {}^v(\nabla_X Y)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada R , ∇ 'nın eğrilik tensörü olup ∇ konneksiyonu üzerindeki Lie türevi $(L_X \nabla)_Y = \nabla_Y \nabla X + R(X, Y)$ ile tanımlıdır.

İspat: (i) $T^*(M_n)$ üzerindeki keyfi X ve Y vektör alanları için $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$

koordinatlarına göre $t(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]$ 'nin bileşenleri

$$\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^\beta \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere (4.32) kullanılarak,}$$

$$\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^J &= {}^{HH}X^I \partial_I ({}^{HH}Y)^J - {}^{HH}Y^I \partial_I ({}^{HH}X)^J \\
&= {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J \\
&\quad - {}^{HH}Y^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J \\
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^J - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J \\
&\quad - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^J + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.32) kullanılarak, $J = \bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\bar{\beta}} \\
&\quad - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\bar{\beta}} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^{\bar{\beta}} + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\bar{\beta}} \\
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon} Y^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} (p_{\varepsilon} Y^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon}) - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon} Y^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&\quad \quad \quad \delta_{\varepsilon}^{\alpha} \quad \quad \quad 0 \\
&\quad - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon} X^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} (p_{\varepsilon} X^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon}) + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon} X^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&\quad \quad \quad \delta_{\varepsilon}^{\alpha} \quad \quad \quad 0 \\
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} Y^{\theta} \Gamma_{\theta}^{\alpha} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} (p_{\varepsilon} Y^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon}) - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} X^{\theta} \Gamma_{\theta}^{\alpha} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} (p_{\varepsilon} X^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon}) \\
&= p_{\varepsilon} X^{\alpha} Y^{\theta} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \Gamma_{\theta}^{\sigma} + p_{\varepsilon} X^{\alpha} Y^{\theta} \partial_{\alpha} \Gamma_{\theta}^{\varepsilon} + p_{\varepsilon} X^{\alpha} (\partial_{\alpha} Y^{\alpha}) \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&\quad - p_{\varepsilon} X^{\alpha} Y^{\theta} \Gamma_{\theta}^{\varepsilon} \Gamma_{\alpha}^{\sigma} - p_{\varepsilon} Y^{\alpha} X^{\theta} \partial_{\alpha} \Gamma_{\theta}^{\varepsilon} - p_{\varepsilon} Y^{\alpha} (\partial_{\alpha} X^{\alpha}) \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&= [p_{\varepsilon} \underbrace{(X^{\alpha} (\partial_{\alpha} Y^{\alpha}) - Y^{\alpha} (\partial_{\alpha} X^{\alpha}))}_{[X, Y]^{\alpha}}] \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \\
&\quad + p_{\varepsilon} \underbrace{(X^{\alpha} Y^{\theta} (\partial_{\alpha} \Gamma_{\theta}^{\varepsilon} - \partial_{\theta} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon}) + \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} \Gamma_{\theta}^{\sigma} - \Gamma_{\theta}^{\varepsilon} \Gamma_{\alpha}^{\sigma})}_{(R(X, Y))_{\beta}^{\varepsilon}}] \\
&= p_{\varepsilon} [X, Y]^{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} + p_{\varepsilon} (R(X, Y))_{\beta}^{\varepsilon}
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci olarak $J = \beta$ için,

$$\begin{aligned}
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\beta} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^{\beta} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^{\beta} \\
&\quad - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^{\beta} + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\beta} \\
&= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} Y^{\beta} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} Y^{\beta} \\
&\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \\
&\quad - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} X^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}^{\alpha} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} X^{\beta} \\
&\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} X^{\beta} = [X, Y]^{\beta}
\end{aligned}$$

Son olarak (4.32) yardımıyla $J = \bar{\bar{\beta}}$ için,

$$\begin{aligned}
&= y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\beta \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha - X^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha) \\
&\quad - p_\varepsilon X^\beta \Gamma_\beta^\varepsilon \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha - y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha Y^\beta \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha \\
&\quad + Y^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha) + p_\varepsilon Y^\beta \Gamma_\beta^\varepsilon \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha \\
&= y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\beta \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha - X^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha) - y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\alpha Y^\beta \partial_\alpha y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha + Y^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha) \\
&= -X^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha) + y^\varepsilon X^\beta \Gamma_\varepsilon^\alpha Y^\theta \Gamma_\alpha^\beta + Y^\alpha \partial_\alpha (y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha) - y^\varepsilon Y^\beta \Gamma_\varepsilon^\alpha X^\theta \Gamma_\alpha^\beta \\
&= -y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha (\partial_\alpha Y^\alpha) - y^\varepsilon X^\alpha Y^\theta \partial_\alpha \Gamma_\theta^\beta - y^\varepsilon X^\alpha Y^\theta \Gamma_\alpha^\beta \Gamma_\theta^\gamma \\
&\quad + y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta Y^\alpha (\partial_\alpha X^\alpha) + y^\varepsilon X^\alpha Y^\theta \partial_\theta \Gamma_\alpha^\beta - y^\varepsilon X^\alpha Y^\theta \Gamma_\theta^\beta \Gamma_\alpha^\gamma \\
&= - \left[y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta X^\alpha \underbrace{(\partial_\alpha Y^\alpha - Y^\alpha (\partial_\alpha X^\alpha))}_{[X,Y]^\alpha} \right] - y^\varepsilon \left[\underbrace{X^\alpha Y^\theta (\partial_\alpha \Gamma_\theta^\beta - \partial_\theta \Gamma_\alpha^\beta - \Gamma_\alpha^\beta \Gamma_\theta^\gamma + \Gamma_\theta^\beta \Gamma_\alpha^\gamma)}_{(R(X,Y))_\varepsilon^\beta} \right] \\
&= - \left[y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta [X,Y]^\alpha \right] - y^\varepsilon (R(X,Y))_\varepsilon^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t(M_n)$ üzerindeki ${}^{HH}[X,Y] - \gamma R(X,Y)$ vektör alanı

$${}^{HH}[X,Y] - \gamma R(X,Y) = \begin{pmatrix} p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha^\varepsilon \\ [X,Y]^\beta \\ -y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta [X,Y]^\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_\varepsilon (R(X,Y))_\beta^\varepsilon \\ 0 \\ y^\varepsilon (R(X,Y))_\varepsilon^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_\alpha^\varepsilon + p_\varepsilon (R(X,Y))_\beta^\varepsilon \\ [X,Y]^\beta \\ -y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon^\beta [X,Y]^\alpha - y^\varepsilon (R(X,Y))_\varepsilon^\beta \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğundan, $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X,Y] - \gamma R(X,Y)$ eşitliği elde edilir.

(ii) Keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanları için $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t(M_n)$

üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^wY]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^wY]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{HH}X, {}^wY]^{\beta} \\ [{}^{HH}X, {}^wY]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.27) ve (4.32)

kullanılarak,

$$\begin{aligned} [{}^{HH}X, {}^wY]^J &= {}^{HH}X^I \partial_I {}^wY^J - {}^wY^I \partial_I {}^{HH}X^J \\ &= {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^J + {}^{HH}X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^J + {}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^wY^J \\ &\quad - {}^wY^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J - {}^wY^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^J - {}^wY^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^{HH}X^J \\ &= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^J + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^J - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \beta}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^J - Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J \end{aligned}$$

elde edilir. $J = \bar{\beta}$ için,

$$\begin{aligned} &= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\beta}} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^{\bar{\beta}} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \beta}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\beta}} - Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\bar{\beta}} \\ &= -Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci olarak $J = \beta$ için,

$$\begin{aligned} &= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\beta} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^{\beta} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \beta}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\beta} \\ &= -Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} X^{\beta} = 0 \end{aligned}$$

Son olarak (4.27) ve (4.32) yardımıyla $J = \bar{\bar{\beta}}$ için,

$$\begin{aligned} &= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \beta}^{\alpha} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}} - Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\bar{\bar{\beta}}} \\ &= p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\varepsilon} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}}}_0 + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}} - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \beta}^{\alpha} X^{\beta} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} {}^wY^{\bar{\bar{\beta}}}}_0 - Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^{\bar{\bar{\beta}}} \\ &= X^{\alpha} \partial_{\alpha} Y^{\beta} + Y^{\alpha} \partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon \theta}^{\beta} X^{\theta} \end{aligned}$$

$\delta_{\alpha}^{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
&= X^\theta \partial_\theta Y^\beta + Y^\alpha X^\theta \Gamma_{\alpha \theta}^\beta \\
&= X^\theta (\partial_\theta Y^\beta + \Gamma_{\theta \alpha}^\beta Y^\alpha) = (\nabla_X Y)^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}}, x^\beta, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t(M_n)$ üzerindeki $(\nabla_X Y)$ 'nin ${}^w(\nabla_X Y)$ dikey lifti

$${}^w(\nabla_X Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X Y)^\beta \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğundan, $[{}^{HH}X, {}^wY] = {}^w(\nabla_X Y)$ eşitliği elde edilir.

4.13 (1,1) Tipli Tensör Alanlarının Yatay Lifti

$F = F_\beta^\alpha \partial_\alpha \otimes dx^\beta$ ile tanımlı M_n 'in bir U komşuluğunda F_β^α bileşenlerine sahip $F \in \mathfrak{S}_1^1(T^*(M_n))$ 'in $t(M_n)$ üzerindeki ${}^{HH}F$ yatay lifti

$${}^{HH}F = {}^cF - \gamma[\nabla F] \quad (4.34)$$

ile tanımlıdır. Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanları için

$$[\nabla F](X, Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX), \quad (4.35)$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. (4.31), (4.34) ve (4.35)'den, $t(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre F 'in, ${}^{HH}F$ yatay lifti

$${}^{HH}F = ({}^{HH}F_J^I) = \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & -\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha F_\alpha^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta F_\beta^\sigma & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon + \Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

bileşenlerine sahiptir. Burada F_β^α 'lar F 'in lokal bileşenleri, $\Gamma_{\beta\alpha}^\varepsilon$ 'lar ise $t(M_n)$ üzerindeki ∇ 'nın bileşenleri olup $\Gamma_{\beta\alpha}$ ve Γ_β^α 'lar ise (4.33) ile tanımlıdır.

İspat: (4.31), (4.34) ve (4.35)' den

$$\begin{aligned}
 {}^{HH}F &= \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & -\Gamma_{\beta\sigma} F_\alpha^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma} F_\beta^\sigma & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon + \Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -p_\sigma \underbrace{(\partial_\alpha F_\beta^\sigma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma F_\beta^\gamma - \partial_\beta F_\alpha^\sigma - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma F_\alpha^\gamma)}_{\nabla_Y(FX) \quad \nabla_X(FY)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon (\partial_\varepsilon F_\beta^\alpha + \Gamma_{\varepsilon\gamma}^\alpha F_\beta^\gamma - \Gamma_{\varepsilon\beta}^\gamma F_\gamma^\alpha) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} F_\alpha^\beta & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -p_\sigma([\nabla F](X, Y))_{\beta\alpha}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\varepsilon (\nabla_\varepsilon F_\beta^\alpha) & 0 \end{pmatrix} = {}^c F - \gamma[\nabla F]
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.13.1. $T^*(M_n)$ üzerindeki keyfi F afinör ve X vektör alanları için $t(M_n)$ de

i) ${}^{HH}F({}^{vv}X) = {}^{vv}(F \circ X),$

ii) ${}^{HH}F({}^{HH}X) = {}^{HH}(FX).$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (i) Keyfi $X \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$, $F \in \mathfrak{S}_1^1(T^*(M_n))$ için (4.27) ve (4.36) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{HH}F({}^{vv}X) &= \begin{pmatrix} F_{\alpha}^{\beta} & -\Gamma_{\beta\sigma}F_{\alpha}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}F_{\beta}^{\sigma} & 0 \\ 0 & F_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\varepsilon}^{\alpha}F_{\beta}^{\varepsilon} + \Gamma_{\beta}^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha} & F_{\beta}^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{\beta}^{\alpha}X^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (F \circ X)_{\alpha} \end{pmatrix} = {}^{vv}(F \circ X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $T^*(M_n)$ üzerindeki keyfi F afinor ve X vektör alanları için (4.32) ve (4.36) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{HH}F({}^{HH}X) &= \begin{pmatrix} F_{\alpha}^{\beta} & -\Gamma_{\beta\sigma}F_{\alpha}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}F_{\beta}^{\sigma} & 0 \\ 0 & F_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\varepsilon}^{\alpha}F_{\beta}^{\varepsilon} + \Gamma_{\beta}^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha} & F_{\beta}^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\sigma}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}^{\sigma\beta} \\ X^{\beta} \\ -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}^{\beta\alpha}X^{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}^{\varepsilon\beta}F_{\alpha}^{\beta} + \underbrace{p_{\theta}\Gamma_{\alpha}^{\theta\varepsilon}F_{\beta}^{\varepsilon}X^{\beta}}_{p_{\theta}(FX)^{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}^{\theta\varepsilon}} - p_{\theta}\Gamma_{\beta}^{\theta\varepsilon}F_{\alpha}^{\varepsilon}X^{\beta} \\ F_{\beta}^{\alpha}X^{\beta} \\ \underbrace{-y^{\gamma}\Gamma_{\gamma}^{\alpha\varepsilon}F_{\beta}^{\varepsilon}X^{\beta}}_{-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}^{\alpha\beta}(FX)^{\beta}} + y^{\gamma}\Gamma_{\gamma}^{\varepsilon\beta}F_{\varepsilon}^{\alpha}X^{\beta} - y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}^{\beta\theta}X^{\theta}F_{\beta}^{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{\sigma}(FX)^{\beta}\Gamma_{\beta}^{\sigma\alpha} \\ (FX)^{\alpha} \\ -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}^{\alpha\beta}(FX)^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (FX)^{\beta}\Gamma_{\beta\alpha} \\ (FX)^{\alpha} \\ -\Gamma_{\beta}^{\alpha}(FX)^{\beta} \end{pmatrix} = {}^{HH}(FX)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

5. SONUÇ

1. Bu projede; Yarı-tanjant (pull-back) demetteki izdüşüm dönüşümleri dikkate alınarak, yarı-tanjant demetin güzel kare (good square) dönüşümüne bir örnek olduğu gösterildi.
2. Yarı-tanjant (pull-back) demette izdüşümlü lineer konneksiyonların tam liftleri tanımlandı.
3. Yarı-tanjant (pull-back) demette tanımlı izdüşümlü lineer konneksiyonlarının tam liftleri ile ilgili çeşitli lift problemleri (tam, dikey, yatay vb.) araştırıldı.
4. Yarı-tanjant (pull-back) demette tanımlı izdüşümlü lineer konneksiyonların tam liftleri ile ilgili infinitesimal lineer dönüşümler incelendi.
5. Yarı-tanjant (pull-back) demete $(0,2)$ tipli tensor alanlarının dikey, tam, yatay vb. liftleri tanımlandı.
6. Yarı-tanjant (pull-back) demete tanımlı $(0,2)$ tipli tensor alanlarının dikey, tam ve yatay vb. liftlerle ilgili çeşitli problemler araştırıldı.
7. Yarı-tanjant demette çeşitli metrikler sunulmuştur.
8. Yarı-tanjant (pull-back) demette izdüşümlü lineer konneksiyonların yatay liftleri tanımlandı.
9. Yarı-tanjant (pull-back) demette tanımlı izdüşümlü lineer konneksiyonlarının yatay liftleri ile ilgili çeşitli lift problemleri (tam, dikey, yatay vb.) incelendi.
10. Yarı-tanjant (pull-back) demette tanımlı izdüşümlü lineer konneksiyonların yatay liftleri ile ilgili infinitesimal lineer dönüşümler çalışıldı.

11. Kotanjant demet T^*M izdüşümü yardımıyla tanjant demetin TM özel bir pull-back (yarı-tanjant tM) demeti tanımlandı ve bu demete tam ve yatay liftler incelendi.
12. Elde edilen bulgular ile birlikte daha sonra hesaplanacak olan yarı-kotanjant demetteki izdüşümlü lineer konneksiyonlara ait tam ve yatay liftlerinin katsayıları kullanılarak en genel yarı demet olan yarı-tensör demetlerde konneksiyonların liftlerine ulaşılmasıdır.
13. Elde edilen bulgular ile (p,q) tipli yarı-tensör demetlerde izdüşümlü lineer konneksiyonların tam ve yatay liftleri tanımlanabilir.
14. Elde edilen bulgular ile (p,q) tipli yarı-tensör (pull-back) demette tanımlanacak izdüşümlü lineer konneksiyonlarının tam ve yatay liftleri ile ilgili çeşitli lift problemleri (tam, dikey, yatay vb.) araştırılabilir.
15. Yarı-tanjant demetteki elde edilen yeni dejenere (singüler) metrikler ile gelecekte fizik alanında ve diferensiyel geometride çok sayıda çalışmalar yapılacaktır.

KAYNAKLAR

- Ay, S., 2013. Yarı Tanjant Demet. (Y. Lisans Tezi), Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.
- Bednarska A., 2013. On lifts of projectable-projectable classical linear connections to the cotangent bundle. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, Mathematica*, 67 (1), 1-10.
- Bishop, R. L. and Goldberg S. I., 1968. *Tensor Analysis on Manifolds*. The Macmillan Company, p.19-135, New York USA.
- Dombrowski, P. 1962. On the Geometry of the Tangent Bundle. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 210: 73-88.
- Duc, T.V., 1979. Structure presque-transverse. *J. Diff . Geom.*, 14 (2), 215-219.
- Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1995. Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 38 (2), 197-215.
- Eker, S., 2019. Seiberg-Witten-like equations on the strictly pseudoconvex CR-3 manifolds, *Bull. Korean Math. Soc.*, 56 (6), pp. 1551-1567.
- Eker, S., 2019. Seiberg-Witten-like equations on the strictly-pseudoconvex CR-7 manifolds, *Miskolc Mathematical Notes*, 20 (1) , pp. 233-243.
- Etayo F., 1991. The geometry of good squares of vector bundles. *Riv. Mat. Univ. Parma* 17 (4) 131–147.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. *Diferensiyel Geometri*. Fen Fakültesi, Ankara Üniversitesi, 269, Türkiye.
- Husemoller, D., 1994. *Fibre Bundles*. Springer. 376, New York.
- Kandatu, A. 1966 Tangent bundle of a manifold with a non-linear connection. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 18, no. 4, 259-270.
- Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I, Interscience Publishers, New York-London.
- Lawson, H. B. and Michelsohn M. L., 1989. *Spin Geometry*. Princeton University Press., Princeton.
- Ledger, A. J. and Yano K., 1965. The tangent bundle of a locally symmetric space. *Jour. London Math. Soc.*, 40, 487-492.
- Mikulski W. M., 2007. On the existence of prolongation of connections by bundle functors, *Extracta Math.* 22 (3), 297–314.

- Morimoto, A., 1970. Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order. Nagoya Math. Jour., 40, 99-120.
- O'Neill, B., 1983. Semi-riemannian with applications to relativity. Academic Press, New York, London.
- Ostianu, N. M., 1974. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem., 5, VINITI, 259–309, Moscow.
- Polat, M., 2018. Complete lifts of vector fields to the special class of semi-tensor bundle. Konuralp Journal of Mathematics, 6 (2), 332-337.
- Polat, M. and Cengiz, N., 2018. Some properties of semi-tensor bundle. New Trends In Mathematical Science, 6 (3), 147-153.
- Pontryagin, L.S. 1947. Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., 21(63):2, 233-284.
- Poor, W. A., 1981. Differential Geometric Structures. McGraw-Hill, New York.
- Poor, W.A. 1981. Differential Geometric Structures, New York, McGraw-Hill.
- Ricci, G., Levi-Civita, T. 1900. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Mathematische Annalen. 54 (1–2): 125–201.
- Salimov, A. A. and Kadioğlu E., 2000. Lifts of derivations to the semitangent bundle. Turk J. Math, 24, 259-266.
- Salimov, A. A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. Jour. J., 10, 338-358.
- Steenrod, N. 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.
- Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Ankara Nobel Yayınları.
- Tanaka N., 1969. On infinitesimal automorphisms of Siegel domains, Proc. Japan Acad. 45 (5), 335-338.
- Vishnevskii, V. V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci., 108 (2), 151-187, New York.
- Vishnevskii, V. V., Shirokov A. P. and Shurygin V. V., 1985. Spaces over Algebras. Kazan. Kazan Gos. Univ. Russian.
- Voigt, W. 1898. The fundamental physical properties of crystals in an elementary presentation, p. 20, Leipzig, Germany.

- Włodzimierz M., Tomáš J., 2009. Reduction for natural operators on projectable connections, *Demonstratio Mathematica*, 42 (2), 435-439
- Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 20, 414-436.
- Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles. *Jour. Math. and Mech.*, 16, 1015-1030.
- Yano, K. and Ishihara S., 1973. *Tangent and Cotangent Bundles*. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Yano, K., Kobayashi, S. 1966. Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, I. General Theory, *Jour. Math. Soc. Japan*, 18, 194-210.
- Yano, K., Ledger, A.J. 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. *J. London Math. Soc.*, 40: 487-492.
- Yano, K. and Patterson E. M., 1967. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles. *Jour. of Math. Soc. Japan*, 19 (1), 91-113.
- Yıldırım, F. 2015. On a special class of semi-cotangent bundle, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, (ANAS)* 41, no. 1, 25-38.
- Yıldırım, F., 2018. Diagonal lift in the semi-tangent bundle and its applications. *Transactions of NAS of Azerbaijan*, 38 (4), 134-148.
- Yıldırım, F., Salimov, A. 2014. Semi-cotangent bundle and problems of lifts, *Turk J. Math*, 38, 325-339.
- Yıldırım, F. and Simsek M., 2020. Lifts of (0,2) tensor fields in the Semi-Tangent Bundle. *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 10, 866-877.