YARI-TANJANT DEMETTE İZDÜŞÜMLÜ LİNEER KONNEKSİYONUN LİFTLERİ

Murat POLAT

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Furkan YILDIRIM
2019
Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARI-TANJANT DEMETTE İZDÜŞÜMLÜ LİNEER KONNEKSİYONUN LİFTLERİ

Murat POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2019

Her hakkı saklıdır

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

YARI-TANJANT DEMETTE İZDÜŞÜMLÜ LİNEER KONNEKSİYONUN LİFTLERİ

Dr. Öğr. Üyesi Furkan YILDIRIM danışmanlığında, Murat POLAT tarafından hazırlanan bu çalışma 25 / 02 / 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından, Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gülçin ÇİVİ BİLİR *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Elif BOYDAŞ *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Furkan YILDIRIM (Danışman) *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 28/02/2019 tarih ve 10.1.105 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma TÜBİTAK 3001 Başlangıç AR-GE projeleri kapsamında desteklenmiştir.
Proje No: 118F176

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

YARI-TANJANT DEMETTE İZDÜŞÜMLÜ LİNEER KONNEKSİYONUN LİFTLERİ

Murat POLAT

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Furkan YILDIRIM

Bu tezde ilk olarak, bir B manifoldu üzerindeki M fibre demeti kullanılarak, tB yarı-tanjant (pull-back) demetin tanımı yapılmıştır. Daha sonra, tB yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonun tam liftleri incelendi. Bu tezin amacı, izdüşümlü lineer konneksiyonun tam liftleri ile yarı-tanjant demette bilinmekte olan vektör alanlarının dikey, tam ve yatay liftleri arasında ilişki kurmaktır. Ayrıca, bu tezde güzel kare dönüşümü için yeni bir örnek sunulmuştur. Son olarak, izdüşümlü lineer konneksiyonlar ve infinitesimal lineer dönüşümler ele alınmıştır.

2019, 108 sayfa

Anahtar Kelimeler: Vektör alanı, tam lift, izdüşümlü lineer konneksiyon, pull-back demet, yarı-tanjant demet.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

LIFTS OF PROJECTABLE LINEAR CONNECTION TO SEMI-TANGENT BUNDLE

Murat POLAT

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Science of Geometry

Supervisor: Asst. Prof. Furkan YILDIRIM

In this thesis; firstly, using the fiber bundle M over a manifold B, the definition of semi-tangent (pull-back) bundle tB is given. Later, complete lifts of projectable linear connection for semi-tangent bundle tB are analyzed. The purpose of this thesis is to establish relations between complete lifts of projectable linear connection and other lifts already known. In thesis, a new example for good square is also presented. Finally, projectable linear connections and infinitesimal linear transformations are discussed.

2019, 108 pages

Keywords: Vector field, complete lift, projectable linear connection, pull-back bundle, semi-tangent bundle.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, dört yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam; Sayın Dr. Öğr. Üyesi Furkan YILDIRIM'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, bana yol gösteren ve bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım değerli hocalarım; Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV, Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER, Sayın Prof. Dr. Kürşat AKBULUT, Sayın Prof. Dr. Nejmi CENGİZ, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK, çalışmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı annem, babam, kardeşlerim, eşim ve kızım Masal Duru'ya ayrıca burs imkânı sağlayan TÜBİTAK-BİDEP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması TÜBİTAK'ın MFAG'a bağlı 118F176 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir.

Murat POLAT

Şubat, 2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 4
2.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar 4
2.2. Tensör Alanları 6
2.3. Vektör Demetleri 14
2.4. Lie Operatörü ve Lie Türevi 18
2.5. Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Levi-Civita (Afin) Konneksiyon 21
2.5.1. Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar 27
2.5.2. Eğrilik ve Burulma Tensörleri 31
2.5.3. Konneksiyonların Dönüşümü 33
2.5.4. Burulması Sıfır Olan Uzaylar 36
2.5.5. Riemannian Manifoldları 42
3. MATERYAL ve YÖNTEM 44
3.1. Tanjant Demet 44
3.1.1. Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti 47
3.1.2. Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti 47
3.1.3. Tanjant Demette 1-Formun Dikey Lifti 48
3.1.4. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Dikey Lifti 49
3.1.5. Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti 50
3.1.6. Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti 50
3.1.7. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Tam Lifti 51
3.1.8. $\gamma-$ Operatörü 52
3.1.9. Yatay Lift 53
3.2. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Tam Liftleri 55

3.3. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Lie Türevi ve İnfinitesimal afin Dönüşümler 61
3.4. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Yatay Liftleri 63
3.5. Yarı-Tanjant Demet 64
3.5.1. Yarı-Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti 67
3.5.2. Yarı-Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti 67
3.5.3. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Dikey Lifti 69
3.5.4. Yarı-Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti 71
3.5.5. Yarı-Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti 71
3.5.6. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Tam Lifti 74
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA 79
4.1. Tanjant Demetin Pull-Back Demeti 79
4.2. İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Liftleri 81
4.3. Vektör Alanlarının Yatay Liftleri 91
5. SONUÇ 106
KAYNAKLAR 107
ÖZGEÇMİŞ 109

SİMGELER DİZİNİ

g	Pseudo-Riemannian Metriği
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
$\widetilde{X}$	İzdüşümlü Vektör Alanları
$\widetilde{F}$	İzdüşümlü Afinor Alanları
$T(\mathrm{M}_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
$t(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-tanjant Demet
R^h_{ijk}	Eğrilik Tensörü
S^h_{ij}	Burulma Tensörü
T^i_{km}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ^h_{ij}	Cristoffel Sembolü
π	Tabii İzdüşüm
^{cc}	Tam Lift
^{vv}	Dikey Lift
^{HH}	Yatay Lift
γ	Gama Operatörü
$^{cc}\nabla$	İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Lifti

1. GİRİŞ

Diferansiyel Geometri, Geometrinin bir bölümü olup diferansiyel ve integral hesaplama yöntemlerini kullanarak geometrik problemleri analiz eden matematiğin bir alt dalıdır. XVII. yüzyılda Descartes, Fermant ve daha sonra Leibniz tarafından keşfedilen ve halen güncelliğini koruyan Diferansiyel geometrinin temel konusu, Öklid uzayında yüzeylerin ve eğrilerin incelenmesi olmuştur. XVIII. yüzyılda da Euler, eğrilerin parametrik gösterimini vermiş ve yüzeylerin eğriliği ile ilgili çalışmaları geliştirmiştir. Yüzeyler ile ilgili ilk kitabı ise Monge 1975 yılında yazmıştır.

Diferansiyel geometrinin gelişmesinde en önemli dönem XIX. yüzyıl olmuştur. Gauss 1827 yılında yüzeylerin dahili geometri fikrini geliştirmiş ve bunla beraber yüzeylerin tam eğriliğinin dahili geometri problemi olduğunu göstermiştir. Yine aynı yüzyılda Lobachevskii, Euclidean geometrisinden başka geometrilerin de olduğunu ispatlamıştır.

Riemannian Geometri adı verilen geometri 1851 yılında Riemannian tarafından tanımlanmıştır. XIX. yüzyılın sonlarında bu geometriler hızla geliştirilip, Mekanik ve Relativite teorisinde uygulama alanları bulmuştur.

Tensör kavramı Diferansiyel Geometri'de önemli bir yere sahip olup ilk olarak 1898 yılında fizikçi Woldemar Voigt tarafından kullanılmıştır. 1890'lı yıllarda tensör hesaplamaları ilk kez Ricci olarak tanınan Gregorio Ricci Curbastro tarafından, "mutlak diferansiyel hesaplamalar" başlığı altında kendisi tarafından sunulmuştur. Daha sonra 1900 yılında Ricci ve Tullio Levi-Civita "mutlak diferansiyel hesaplama metodları ve uygulamaları" başlığı altında çalışmalarını yayımladılar.

Tensör alanı, uzaydaki her bir noktaya bir vektör veya skaler karşılık getiren ve bunların genelleşmiş şekli olan manifold üzerinde tanımlı bir dönüşümdür. Kısaca manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren dönüşümdür. Diferansiyel geometride tensör alanı yerine kısaca tensör kullanılır.

Riemannian manifoldunda tanjant demetlerin Diferansiyel Geometrisi ilk kez 1958'de Sasaki tarafından incelenmiştir. Tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine Dombrowski 1962'de önemli katkıda bulunmuştur. Yano ve Ledger (1965), tanjant demeti simetrik uzaylarda tanımlayıp bununla ilgili çalışmalar yapmışlardır. Daha sonra Kandatu, 1966 yılında lineer olmayan konnesiyona sahip bir manifoldda tanjant demeti tanımlamıştır.

Tanjant demette liftler ile ilgili yapılan ilk çalışma tensör alanlarının ve konneksiyonların dikey ve tam liftleri olup Kobayashi ve Yano (1966) tarafından yapılmıştır. Ama lift kavramı genişleme anlamında daha önce Sasaki'nin 1958 yılındaki çalışmalarında "devam" adı altında çalışılmıştır.

1967 yılında Yano ve Ishihara "tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleri" ile ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Ayrıca "Tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri" ile ilgili çalışmalar 1970 yılında Morimoto tarafından yapılmıştır.

Yano ve Petterson, 1967 yılındaki çalışmalarında lift konusunu kotanjant demette incelemiştir. Yano ve Ishihara, 1973 yılındaki çalışmalarında ise hem tanjant demet hemde kotanjant demete dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer vermiştir.

Yarı-tanjant demet ise ilk olarak Duc tarafından 1979 yılında tanımlanmış ve yarı-tanjant demete ait bazı özellikler Vishnevskii tarafından 2002 yılında incelenmiştir. 2000 yılında Salimov ve Kadıoğlu "yarı-tanjant demette Lie ve kovaryant türevlerinin tam liftleri" ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Ayrıca, 1985 yılında Vishnevskii, Shirokov ve Shurygin ve 2002 yılında Vishnevskii tarafından yarı-tanjant demete izdüşümlü lineer konneksiyonlar ve bunların eğrilik, burulma tensörleri ile lie türevleri gibi bazı özellikleri çalışılmıştır.

Bu tezde ise 2002 yılında Vishnevskii tarafından başlatılan yarı-tanjant (pull-back) demete izdüşümlü lineer konneksiyonların tam liftleri tanımlanıp, çeşitli lift problemleri ele alınmıştır. Ayrıca, yarı-tanjant demetin güzel kare dönüşümüne somut bir örnek olduğu gösterilmiş ve yarı-tanjant demette infinitesimal lineer dönüşümler ilk kez ele alınmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Bu bölümde manifoldların tanımı verilmekte ve üzerindeki temel yapılar tanıtılmaktadır.

Tanım 2.1.1: M bir Hausdorff topolojik uzay olsun. $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan $\varphi : U \to V$ homeomorfizm dönüşümüne M uzayında n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine ise φ haritasının koordinat bölgesi veya koordinat komşuluğu denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. $x \in U$ için

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, ..., x^n$ gerçel sayılarına x noktasının φ haritasındaki koordinatları denir (Salimov ve Mağden 2008)

Tanım 2.1.2 Eğer M Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad (\text{ A-indisler kümesi })$$

olacak şekilde bu uzayı örterse M uzayına n boyutlu topolojik manifold yada sadece n boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 2008)

Tanım 2.1.3: M Hausdorff topolojik uzay ve k, $0 \le k$ şartını sağlayan bir tam sayı olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan $\left\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset M\right\}$ lokal koordinatlar ailesi M de C^k-sınıfından n boyutlu atlas olarak adlandırılır.

i. M , n boyutlu topolojik manifold, yani lokal haritaların U_α bölgesi M manifoldunu örter

ii. Herhangi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olması durumunda

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. (Bu şarta $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.)

Koordinat dönüşüm kuralı $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,...,n\right)$ şeklinde olan $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü denir. Burada u_α^j ve u_β^i, sırasıyla, $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritalarındaki x noktasının koordinatlarıdır. $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ olması durumunda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. Bu dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olması ile yukarıda bashedilen 2.şart denktir. Yani, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobi matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır (Salimov ve Mağden 2008)

Tanım 2.1.4: $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$**,** $\left\{\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$ atlasının ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ da $\left\{\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)\right\}_{\beta \in A}$ atlasının keyfi haritaları olmak üzere eğer bu haritalar C^k uzlaşmış ise yani her iki atlasın birleşimi C^k sınıfından yine bir atlas ise bu atlaslara denk atlaslar denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 2.1.5: C^k atlaslarının denklik sınıfına M Hausdorff topolojik uzayı üzerinde C^k yapı adı verilir. C^k yapısının bütün C^k atlaslarının birleşimi olan C^k atlasına maksimal C^k atlas denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

M Hausdorff uzayı üzerindeki C^k atlaslarının bütün denklik sınıfları kendisinin bir elemanı ile tayin edilebilir. Yani, C^k yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla

oluşturulabilir. Böylece M üzerindeki her bir C^k yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucuna varılır.

$C^k \left(1 \le k \le \infty\right)$ yapıya düzgün (smooth) yapı, C^0 yapıya ise topolojik yapı denir. Bundan sonra sadece C^∞ yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: *M*, sayılabilir bazı olan Hausdorff topolojik uzay olmak üzere eğer *M* üzerinde *n* boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmiş ise bu uzaya C^∞ sınıfından *n* boyutlu diferansiyellenebilir manifold veya düzgün (smooth) manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008)

2.2. Tensör Alanları

Bu bölümde öncelikle tensör tanımı yapılarak, tensör cebrinin temel kavramları, tensör örnekleri, vektör ve kovektör alanları ile dış form tanıtılmaktadır.

Tanım 2.2.1: B_n**,** n boyutlu vektör uzayı ve onun dual uzayı ise B_n^* olmak üzere $\vec{x}_j \in B_n,\ j = 1,...,q$, q tane vektör ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*,\ i = 1,...,p$, p tane kovektör değişkenlerine karşılık gelen

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

gerçel değerli fonksiyonu eğer her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela $\overrightarrow{x_1}$ vektör değişkenine göre, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

şeklinde lineerlik şartını sağladığı gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{p-\tan e} \times \overbrace{B_n^* \times B_n^* ... \times B_n^*}^{q-\tan e} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında *q*. dereceden kovaryant, *p*. dereceden kontravaryant tensör denir. Bu şekilde tanımlanan tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına tensörün valentliği, *(p,q)* gösterimine ise tensörün tipi denir. *(0,q)* tipli tensörlere kovaryant tensörler, *(p,0)* tipli tensörlere ise kontravaryant tensörler denir. $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına *(0,0)* tipli tensör olarak bakılabilir (Şahin 2012)

Örnek 2.2.1. $v^* : B_n \to \mathbb{R}$ dual vektörü 1. mertebeden kovaryant tensördür.

Örnek 2.2.2. B_n bir vektör uzayı olmak üzere B_n ile $\left(B_n^*\right)^*$ özdeş olduğundan her $u \in B_n$ vektörü, $u : B_n^* \to \mathbb{R}$ lineer dönüşüm olarak alınırsa, her bir vektör 1. mertebeden kontravaryant vektördür.

Örnek 2.2.3. Her bir bilineer form 2. mertebeden kovaryant tensördür.

Örnek 2.2.4. $\pi : B_n^* \times B_n^* \to \mathbb{R}$ ile tanımlı 2-lineer dönüşümü 2. mertebeden kontravaryant tensördür.

Örnek 2.2.5. $\mathbb{R}_n^n$ deki matrislerin $n-$tane kolon vektörü üzerinde determinant fonksiyonu $n-$lineer olduğundan determinant fonksiyonu *n*. mertebeden kovaryant tensördür.

Tanım 2.2.2: B_n bir vektör uzayı ve onun dual uzayıda B_n^* olsun. $T_q^p(B_n)$, B_n vektör uzayı üzerindeki p. mertebeden kovaryant ve q. mertebeden kontravaryant tensörlerin uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} C_j^i &: T_q^p \to T_{q-1}^{p-1} \\ A &\to (C_j^i A)(X_2,...,X_{p-1},\omega^2,...,\omega^{q-1}) = C\left\{A(X_1,...,X_{p-1},\omega^1,...\omega^{q-1})\right\} \end{aligned}$$

ve

$$(C_j^i A) = \sum_m A(X_m, X_1,...,X_{p-1},\omega^m,\omega^1,...,\omega^{q-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon (daraltma, bükülme) operatörü denir. Burada $X_m, X_1,...,X_{p-1}$ ve $\omega^m,\omega^1,...,\omega^{q-1}$, sırasıyla, B_n üzerindeki baz vektörler ve dual baz vektörleridir. Buradan bir kontraksiyon işleminin, (p,q) tipli tensörü $(p-1,q-1)$ tipli tensöre taşıdığını yani tensörün mertebesini düşürdüğü söylenebilir (Şahin 2012)

$T_2^0(B_n)$ uzayının tüm simetrik tensörlerinin alt uzayı $S_2(B_n)$ olsun. Keyfi bir $(0,2)$ tipli $g \in S_2(B_n)$ simetrik tensörü için,

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 0,\ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartından $\vec{x} = 0$ alınırsa g tensörüne regüler tensör adı velirilir. (2.1)'in koordinatlarla ifadesi,

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

şeklindedir. $\forall y^j \in B_n$ için bu eşitlik sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0,\ \ j = 1,...,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminde $x^i = 0$ olması için

$$Det\left(g_{ij}\right) \neq 0$$

olmalı. Burada $\left(g_{ij}\right)$, g tensörüne karşılık gelen matristir.

Eğer $g \in S_2\left(B_n\right)$ simetrik tensörü regüler ise bu tensöre B_n uzayında esas tensör (metrik tensör) denir. $\left(\tilde{g}^{ij}\right)$ matrisi esas tensöre karşılık gelen $\left(g_{ij}\right)$ nin tersi olmak üzere

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

eşitliği geçerlidir. B_n vektör uzayı ve onun duali olan B_n^* uzayları arasındaki

$$\xi_i = g_{ik} x^k, \ (\eta_i = g_{ik} y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümünde (2.2) eşitliği kullanılırsa,

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, \ (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i) \tag{2.4}$$

biçiminde olur. $g \in S_2\left(B_n\right)$ simetrik tensörü,

$$\omega = g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = g_{ij} x^i y^j$$

invaryant bilineer form şeklinde yazılır. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılarak,

$$\omega = g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

elde edilir. Buradan, *(0,2)* tipli g esas tensörü verildiğinde kovektör değişkenlerinin invaryant bilineer formu $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ şeklinde bulunur. Burada $\tilde{g}^{ij}$, *(2,0)* tipli tensörün

koordinatları olup bu tensöre g tensörünün invers tensörü denir. Ayrıca $\tilde{g}^{ij}$ tensörünün de simetrik olduğu

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\eta,\xi) &= \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,\\ \tilde{g}(\xi,\eta) &= \tilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j\\ &= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \tilde{g}(\eta,\xi)\end{aligned}$$

eşitliklerinden görülür. Buradan, B_n uzayında g simetrik tensörü verildiğinde B_n uzayından B_n^* dual uzayına bir izomorfizm bulunur. Böylece vektör ve kovektörler aynılaştırılır. Hem vektör hemde kovektör $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki}x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

şeklinde yazılır. $(x^i \to x_k)$ işlemine indisin indirilmesi, $(x_k \to x^i)$ işlemine ise indisin yükseltilmesi denir. $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörü incelenecek olursa; indislerin yükseltilmesi işlemi,

$$S^{p}_{\cdot j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, \quad S_{i\cdot}^{\ p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, \quad S^{pq}_{\cdot\cdot} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

ve indislerin indirilmesi işlemi,

$$S_{p}^{\cdot\ j} = g_{pi}S^{ij}, \quad S^{i\cdot}_{\ p} = g_{pj}S^{ij}, \quad S^{\cdot\ \cdot}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

şeklindedir.

B_n uzayında $g(\vec{x},\vec{y})$, (0,2) tipli tensör olmak üzere $\vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımına, bu tensörün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi (trace) denir. $(\vec{x},\vec{y})$ veya $\vec{x}\vec{y}$ şeklinde gösterilir ve

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

$Det(g_{ij}) \neq 0$ (regülerlik şartı) olması durumunda skaler çarpıma, regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.3: C^{∞} sınıfından bir M_n manifoldunun her p noktasındaki tanjant uzayı T_p olmak üzere her $p \in M_n$ noktasına karşılık gelen tanjant uzayının bir elemanı olan X_p vektörü karşılık getiren vektör değerli X fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f fonksiyonu M_n manifoldunda bir dönüşüm olmak üzere

$$(Xf)(p) = X_p f$$

şeklinde tanımlanan Xf de M_n manifoldunda bir dönüşümdür.

$U \subset M_n$ koordinat komşuluğu olmak üzere bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

biçimindedir. Burada ξ^i bileşenleri U komşuluğundaki lokal koordinatlara bağlıdır ve

$$\xi^i = \xi^i(x^i, ..., x^n), \quad i = 1, ..., n$$

şeklinde yazılır.

C^{∞} sınıfından bir M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasındaki bütün *(p,q)* tipli tensörler için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.4: C^∞ sınıfından bir M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı $T_q^p(m)$ olmak üzere her m noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren *(p,q)* tipli T fonksiyonuna tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Özel olarak; $p=1,\ q=0$ alınırsa $(1,0)$ tipli bir vektör alanı, $p=0,\ q=1$ alınırsa $(0,1)$ tipli kovektör alanı ve $p=q=0$ alınırsa M_n manifoldundaki her m noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Dolayısıyla $(0,0)$ tipli tensör alanı gerçel değerli bir fonksiyon belirtir.

f, $U \subset M_n$ bölgesinden alınan C^∞ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Buda f fonksiyonunun diferansiyelini gösteren df operatörünün $(0,1)$ tipli bir tensör alanı olduğunu gösterir.

T_m, M_n manifoldunun keyfi bir m noktasındaki tensörü olmak üzere eğer T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı, T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir.

(p,q) tipli bir T tensör alanı için (0,1) tipli vektör alanları $X_1,...,X_q$ ve $(0,1)$ tipli tensör alanları da $\theta_1,...,\theta_p$ olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

eşitliği gerçel değerli fonksiyon belirtir.

T tensör alanının bileşenleri x^i koordinatlarına göre,

$$T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T(dx^{i_1},...,dx^{i_p},\partial_{j_1},...,\partial_{j_q})$$

biçiminde olup gerçel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için bileşenlerinin C^∞ sınıfından fonksiyonlar olması gerekir. C^∞ sınıfından $(0,1)$ tipli tensör alanlarına 1-form (kovektör alanı) veya Pfaffian form denir.

Her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir $X_1,...,X_q$, C^∞ sınıfından vektör alanları için T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.5: $(0,2)$ tipli bir $\omega=(\omega_{ij})$ tensörü için verilen indislere göre antisimetriklik şartı varsa $\omega=(\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir.
Herhangi bir k-forma dış diferansiyel uygulanırsa (k+1)-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega\in T_{k+1}(M_n)$ olup (k+1)-form oluşur. Bu şekildeki (k+1) formlara tam form denir.

$$d^2\omega=d(d\omega)=0$$

eşitliğinin sağlanması durumu tam formların önemli bir özelliğidir. Yani tam formlara dış diferansiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur (Şahin 2012).

Örnek 2.2.6: $\omega=xdy\wedge dz-ydx\wedge dy$ formunun tam form olmadığını ya da kapalı form olmadığını gösterelim. Dış diferansiyel için

$$d\omega=dx\wedge dy\wedge dz+xd(dy\wedge dz)-dy\wedge dx\wedge dy-yd(dx\wedge dy)$$

olup $d^2=0$ olduğundan

$$d\omega=dx\wedge dy\wedge dz-dy\wedge dx\wedge dy$$

elde edilir. Ayrıca $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ olduğu kullanılırsa

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dy \wedge dz$$

olur. Diğer taraftan $dy \wedge dy = 0$ olup

$$d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

elde edilir. Burada $dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$ olduğundan ω bir kapalı form değildir. Dolayısıyla tam form da değildir.

2.3. Vektör Demetleri

Bu alt bölümde fibre demetleri, vektör demetleri ve üzerindeki diferansiyellenebilir yapılar tanıtılarak vektör demeti örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.3.1. B, E, F , C^∞ sınıfından birer manifold ve $\pi : E \to B$ de C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun. Eğer

$$(\pi \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : U_\alpha \subset B \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \xrightarrow{\pi} B \\ (x, y) \to \varphi_\alpha(x, y) \longrightarrow (\pi \circ \varphi_\alpha)(x) = x \end{aligned}$$

diffeomorfizmlerinin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π dönüşümüne F manifolduna göre lokal çarpım özelliğine sahip dönüşüm denir. $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π dönüşümünün lokal ayrışması denir. Burada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, B manifoldunun bir açık

örtüsüdür. $C^{\infty}(E,B)=\{\pi\,|\,\pi:E\to B\}$ cümlesinin herhangi bir elemanı lokal çarpım özelliğini sağlaması halinde bu dönüşüme açık ve örten bir dönüşüm denir (Husemoller 1994).

Tanım 2.3.2. Eğer lokal çarpım özelliği olan bir $\pi:E\to B$ dönüşümü varsa $\zeta=(E,\pi,B,F)$ dörtlüsüne diferansiyellenebilir fibre demeti denir.

Bir fibre demetinde, E manifolduna baz manifoldu veya total uzay, F manifolduna fibre modeli, B manifolduna baz uzay ve π dönüşümüne de izdüşüm veya fibrasyon denir. Fibre demeti E veya $\pi:E\to B$ şeklinde gösterilir (Husemoller 1994).

Tanım 2.3.3. $\forall x\in B$ için

$$\pi^{-1}(x)=F_x=\{u\in E\,|\,\pi(u)=x\}$$

kümesine x üzerinde fibre denir. Burada $\pi:E\to B$ bir fibre demetidir. Tüm F_x fibrelerinin ayrık birleşimi

$$E=\bigcup_{x\in B}F_x$$

total uzayını verir (Duggal and Bejancu 1996).

Not 2.3.1. Fibre demeti için verilen tanım gözönüne alınarak, bir manifold ve onun bütün tanjant uzayları ile birlikte bir fibre demeti olduğu söylenebilir. Bu durumu daha iyi görebilmek için M 1-boyutlu manifold (eğri) olmak üzere eğrinin her noktadaki teğet vektörleri (tanjant uzayları) ele alalım. $p\in M$ noktasındaki teğet vektörü olan T_p üzerindeki her nokta, uzunluğu olan ve p noktasında M manifolduna teğet olan bir vektör gösterir. Böylece her nokta için sadece bir vektör ve bir nokta karşılıklı olarak vardır. Buradan, bütün noktalardaki bütün vektörler topluluğu aynı anda gözönüne alınırsa yeni bir manifold tanımlanabilir. Her nokta ve bu noktadaki vektör elde edilen yeni manifoldun noktalarını oluşturacağı için manifold 2-boyutlu olur. Böylece 2-

boyutlu fibre demeti elde edilir. Bu fibre demetinde her p noktasındaki T_p tanjant uzayları demetin fibreleri olur. Burada alınan 1-boyutlu manifold (eğri) fibre demetinin baz manifoldudur (Şahin 2012)

Tanım 2.3.4. M ve B diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $\pi : M \to B$ diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $E(M, B, \pi)$ ye B manifoldu üzerinde vektör demeti denir.

1. Her $p \in B, \pi^{-1}(p)$ vektör uzayı yapısına sahip olup bu uzayın boyutu her zaman sabit kabul edilir. $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayına vektör demetinin fibresi denir.

2. Herhangi $p \in B$ noktasının bir komşuluğu U , $n \geq 0$ sayısı ve

$$h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

diffeomorfizm dönüşümü var öyle ki keyfi $q \in U$ için

$$h_q : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

$$y \to h(q, y)$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ ile $\pi^{-1}(q)$ arasında bir lineer izomorfizmadır.

Burada M manifolduna baz manifoldu, B manifolduna üs manifoldu, π dönüşümüne izdüşüm dönüşümü, $\pi^{-1}(p)$ uzayına p noktasındaki fibre ve (U, h) ikilisine de M manifoldunun koordinat haritası denir. Bir fibre demeti ile vektör demetinin karşılaştırılmasından $F = \mathbb{R}^n$ ve F_x'in vektör uzayı olduğu kolayca görülür (Şahin 2012).

Vektör demetine aşağıdaki gibi örnekler verilebilir.

Örnek 2.3.1. M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $M \times \mathbb{R}^n$ bir vektör demetidir. Bu vektör demeti aşikar vektör demeti olarak adlandırılır. Bu vektör demetinin izdüşümü, $(p,x) \in M \times \mathbb{R}^n$ noktası için $\pi(p,x) = p$ ile tanımlıdır. Diğer taraftan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda_1(p,x_1) + \lambda_2(p,x_2) = (p, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

olarak tanımlanırsa fibreler vektör uzayı yapısına sahip olur.

Örnek 2.3.2. T_pM , $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olmak üzere diferansiyellenebilir M manifoldunun tüm p noktalarındaki T_pM tanjant uzaylarının birleşimi

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

şeklindedir. $(p,V) \in TM$ ikilisi için $\pi : TM \to M$ izdüşümünü $\pi(p,V) = p$ ile tanımlayalım. Bu durumda $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $V_1, V_2 \in T_pM$ ve $p \in M$ için

$$\lambda_1(p,V_1) + \lambda_2(p,V_2) = (p, \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)$$

işlemi ile birlikte $\pi^{-1}(p)$ fibresi vektör uzayı yapısına sahip olmaktadır. Diğer taraftan $p \in M$ için M manifoldunda $\phi(U) = \{(x_1, ..., x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ olacak şekilde p noktasının bir U komşuluğu ve ϕ koordinat dönüşümü vardır. p noktasındaki $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ tanjant vektörü ve

$$\begin{aligned} h : U \times \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(U) \\ (p,V) &\to h(p,V) = \sum_{i=1}^{n} V_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. $e = \sum_{i=1}^{n} e_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ için

$$h^{-1}(e) = (\pi(e), (e_1, ...e_n))$$

olur. Böylece h dönüşümü bir diffeomorfizma belirtir. Sonuç olarak TM, M manifoldu üzerinde bir vektör demetidir ve bu vektör demetine tanjant demet denir (Şahin 2012).

Tanım 2.3.5. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ ve $\zeta' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olmak üzere eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ζ' vektör demetine, ζ vektör demetinin altvektör demeti denir.

1. $B = B'$,
2. $\forall x \in B'$ için F_x' fibresi F_x fibresinin bir altvektör uzayıdır,
3. $\iota : E' \to E$ inclusion dönüşümü diferansiyellenebilirdir (Steenrod 1951).

2.4. Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 2.4.1. X ve Y, bir $U \subset M_n$ açık kümesinde tanımlı olan vektör alanları ve f fonksiyonu $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ cümlesinin bir elemanı olmak üzere X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü,

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

eşitliği ile verilir ve $[X, Y]$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 2003). ∂_i doğal çatısına göre $[X, Y]$ vektör alanının ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = \left(X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j\right) \partial_j$$

şeklindedir. Özel olarak $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ alınırsa,

$$\left[\partial_i, \partial_j\right] = 0$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.1: x, y ve z, R^3 Öklidyen uzayının koordinatları olmak üzere $U = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, $V = x\dfrac{\partial}{\partial z}$ alalım.

$$[U,V]f = \left[z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial z}\right]f = z\frac{\partial}{\partial z}(x\frac{\partial}{\partial z}(f)) - x\frac{\partial}{\partial z}(z\frac{\partial}{\partial z}(f))$$

$$= zx\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - x\frac{\partial f}{\partial z} - xz\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x\frac{\partial f}{\partial z}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $[U,V] = -V$ olur.

Lie operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$ (Lineerlik)

ii. $[X,Y] = -[Y,X]$ (Anti-simetriklik)

iii. $[X, fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$ (Leibniz Şartı)

iv. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)

v. $[fX,Y] = -(Yf)X + f[X,Y]$

vi. $[fX,gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

Tanım 2.4.2. Aşağıdaki şartları sağlayan X vektör alanı yönündeki L_X , $X \in \Im_0^1(M_n)$ tensör diferansiyelleme işlemine Lie diferansiyellemesi denir.

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \Im_0^0(M_n)$,
2. $L_X Y = [X,Y], \forall X,Y \in \Im_0^1(M_n)$.

$L_X Y$ nin lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferansiyellemesi kullanılarak elde edilen değere Lie türevi denir.

Keyfi tipli bir $t \in \Im_s^r(M_n)$ tensör alanı için Lie türevi formülü

$$L_X t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = X^k \partial_k t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + \sum_{\lambda=1}^{s} (\partial_{j_\lambda} X^k) t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots k \ldots j_s} - \sum_{\lambda=1}^{r} (\partial_k X^{i_\mu}) t^{i_1 \ldots k \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008).

Not 2.4.1: Bazı temel tensörlerin Lie türevleri aşağıdaki gibidir:

i. (1,0) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X Y^i = X^m \partial_m Y^i - Y^m \partial_m X^i$$

ii. (0,1) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X w_i = X^m \partial_m w_i + \partial_i X^m w_m$$

iii. (1,1) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X t^i_j = X^m \partial_m t^i_j - \partial_m X^i t^m_j + \partial_j X^m t^i_m$$

iv. (0,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X g_{ij} = X^m \partial_m g_{ij} + \partial_i X^m g_{mj} + \partial_j X^m g_{im}$$

v. (1,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X S_{ij}^k = X^m \partial_m S_{ij}^k - \partial_m X^k S_{ij}^m + \partial_i X^m S_{mj}^k + \partial_j X^m S_{im}^k$$

vi. (1,2) tipli tensörlerin Lie türevlemesinin koordinatlarla ifadesi:

$$L_X R_{ijk}^s = X^m \partial_m R_{ijk}^s - \partial_m X^s R_{ijk}^t + \partial_i X^m R_{mjk}^s + \partial_j X^m R_{imk}^s + \partial_k X^m R_{ijm}^s$$

2.5. Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Levi-Civita (Afin) Konneksiyon

$\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralı; diferansiyellenebilir bir M_n manifolduna γ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesidir. γ eğrisinin keyfi bir noktasındaki v^i vektörü alınan t parametresine bağlı olarak değişip konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalıyorsa bu durumda v^i vektörünün alınan konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırıldığı söylenebilir. Paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilir fonksiyonlar olması için verilen konneksiyonun diferansiyellenebilir olması gerekir. Vektörlerin paralel kaydırılması durumunda lineer bağımlılık şartı korunursa bu konneksiyona lineer veya afin konneksiyon denir.

Bir vektörün eğri boyunca alınan afin (lineer) konneksiyona göre paralel kaydırılması, yani verilen afin konneksiyonunun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasındaki uygunluğunu ifade eden şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i$, $k = 1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$ nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Böylece,

$$dv^i = \lambda^k d\, \underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i\, v^i \tag{2.7}$$

olur. (2.6)'da verilen $\underset{k}{a}^i$ baz vektörüdür ve $\overset{k}{a}_i$ da buna karşılık gelen kobaz vektörüdür. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ eşitliği geçerlidir. (2.7) eşitliği (2.6)'da kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i\, d\, \underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9)'da verilen ω_i^k, bağlantı objeleri veya konneksiyon formları olarak adlandırılır.

Teorem 2.5.1:

i. Bağlantı objeleri (konneksiyon formları), $\left\{a_k^i\right\}$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

ii. Bağlantı objeleri, eğrisel koordinatların dönüştürülmesinde tensörlerin dönüşüm kuralına göre dönüşmezler (Kobayashi and Nomizu 1963).

İspat:

i. Farklı bazlara karşılık gelen ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ konneksiyon formları olmak üzere v^i vektörünün verilen konneksiyona göre paralel kaydırılması şartı her ikisi için, sırasıyla,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.10), (2.11) ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartlarından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

ii. M_n manifoldunun U bölgesindeki u^i eğrisel koordinatların değişmesi durumunda baz vektörlerin ve kovektörlerin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ şeklindedir. (2.12) deki ikinci eşitliğin diferansiyeli alınırsa,

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

olur. (2.9) eşitliğinde, (2.12) deki eşitliklerden birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği kullanılarak,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

elde edilir. Bu eşitlik konneksiyon formlarının yani bağlantı objelerinin, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Bir kovektörün alınan konneksiyona göre paralel kaydırlması şartı aşağıdaki tanım ile verilebilir.

Tanım 2.5.1: Bir ω_i kovektörünün alınan afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılması şartı; γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan herhangi bir v^i vektörü üzerindeki izinin bu eğri boyunca sabit kalmasıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} d(v^i\omega_i) &= dv^i\omega_i + v^i d\omega_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

denklemi yazılır. Bir v^i vektörünün paralel kaydırılması,

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

şartı ile verilir. Bu eşitlik (2.15) de yazılırsa,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right)v^i = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece keyfi bir v^i vektörü için, ω_i kovektörün afin konneksiyonuna göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartının,

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

şeklinde olduğu bulunur.

Şimdi de vektör ve kovektör alanlarının γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartı kullanılarak, verilen eğrinin çeşitli noktalarına uygulanan (p,q) tipli tensörün paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

$\left(p,q\right)$ tipli keyfi tensörün izi γ eğrisi boyunca

$$Z = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilsin. Bu fonksiyondaki vektör ve kovektör değişkenlerinin verilen eğri boyunca paralel kaydırılması şartları göz önünde bulundurulursa Z fonksiyonunun diferansiyeli,

$$\begin{aligned} dZ &= dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} d\overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &+ \ldots + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \qquad (2.18) \\ &= \left(dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{j_2 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \right) \overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned}$$

olarak yazılır. (2.18) eşitliğinde

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \qquad (2.19)$$

olarak alınması durumunda Z fonksiyonunun diferansiyeli,

$$dZ = \delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overset{1}{v}{}^{j_1} \ldots \overset{q}{v}{}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \qquad (2.20)$$

olarak bulunur. Verilen γ eğrisi boyunca alınan afin konneksiyona göre vektör ve kovektör değişkenlerinin paralel kaydırılması ile bulunan multilineer fonksiyonunun diferansiyeli de vektör ve kovektör değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. Böylece bulunan *dZ* multilineer fonksiyonuna tipi $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olan belirli bir tensör karşılık gelir. Bu tensörün tipi ile $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi aynı olur ve koordinatları ise (2.19) daki gibi olur. Burada $\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferansiyeli denir.

Tensörün mutlak diferansiyelinin tanımından aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

1. Vektör ve kovektör (1-form) değişkenlerinin paralel kaydırılması şartları, sırasıyla,

$$\delta v^i = 0 \ , \ \delta \omega_i = 0$$

biçiminde olup (p,q) tipli tensörün paralel kaydırılması koşuluda

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = 0$$

şeklinde verilir.

2. Birim tensörün de mutlak diferansiyeli,

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

biçimindedir.

Tensörlerin mutlak diferansiyelleri ya da tensör diferansiyellemesi için aşağıdaki özellikleri yazılabilir:

i. $\delta\left(t_1 \mp t_2\right) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir (Lineerlik şartı),

ii. $\delta(\lambda t) = (\delta\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

iii. $\delta\left(A \otimes B\right) = \left(\delta A\right) \otimes B + A \otimes \left(\delta B\right)$, (Leibniz Kuralı) burada A ve B keyfi tipli tensörler olup $\otimes$ işareti tensör çarpımıdır.

iv. Tensörlerin kontraksiyon, simetrikleştirme ve alterneleştirme işlemleri mutlak diferansiyelleme işlemi ile yer değiştirebilir. Mesela $\delta(Ct) = C(\delta t)$ olacak şekilde δ işlemi kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

2.5.1. Afin (Lineer) Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 2.5.1.1: Diferansiyellenebilir X_n manifoldunun bütün eğrileri boyunca afin konneksiyonu verilsin. X_n diferansiyellenebilir manifoldu lineerlik şartını sağlarsa X_n manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir (Bishop and Goldberg 1968).

Şimdi burada geçen lineerlik şartını inceleyelim:

M, X_n manifoldundan alınan keyfi bir nokta ve komşuluğu bu noktada olan keyfi vektör alanları alınsın. M noktasından geçen herhangi bir eğri için hesaplanmış keyfi bir v^i vektör alanının mutlak diferansiyeli,

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. (2.21) eşitliği elementer yer değişme işlemi bu eğri boyunca du^i vektörünün lineer fonksiyonudur. Buradaki v^i_k, noktaya ve v^i vektör alanına bağlı bir fonksiyondur. du^k da buradaki bütün vektörlere teğet olan vektörün koordinatlarıdır. Ayrıca $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğun için

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = \left(v^i_s - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

eşitliği bulunur. Burada v^k, $\partial_s v^i$ nin ve v^i_s ler de u^i lerin fonksiyonlarıdır. ω^i_k formları v^i vektör alanlarının seçilişinden bağımsız olduğu için ω^i_k formları du^k koordinatlarının lineer fonksiyonu olup

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^{\ i} du^s \tag{2.24}$$

şeklinde yazılır. $\Gamma_{sk}^{\ i}$ katsayıları, afin (lineer) uzayın bir noktasının fonksiyonları olup afin konneksiyonun katsayıları olarak adlandırılır. X_n manifoldunda konneksiyon katsayıların verilmesi afin konneksiyonunu tayin eder.

$\Gamma_{sk}^{\ i}$ afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı:

(2.24) eşitliğinden,

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{\ i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{\ i'} A_k^{k'} du^k$$

olur. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin her iki tarafının ∂_k kısmi diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}
&\partial_k \left(A_j^{j'} A_{j'}^i\right) = \partial_k \left(\delta_j^i\right) = 0 \\
&\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = 0 \\
&A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = -\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik (2.25) de kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'}\right) du^k \tag{2.26}$$

olur. Böylece (2.14), (2.24) ve (2.26) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^{\ i} = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{\ i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ şeklindedir.

Afin konneksiyonuna sahip uzayda verilen keyfi bir vektör alanının mutlak diferansiyeli, (2.24)'den

$$\delta v^i = (\ \partial_k v^i + \Gamma^{\ i}_{ks} v^s\ )\, du^k \tag{2.28}$$

şeklinde olur. (2.28) denkleminde sol taraftaki δv^i bir tensör olup du^k da vektör olduğu için parantez içindeki ifade tensörün koordinatlarını verecektir. Bu şekilde verilen tensör için verilen v^i tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^{\ i}_{ks} v^s \tag{2.29}$$

şeklinde gösterilir. Kovaryant türev *(1,1)* tipinde bir tensör belirtir.

Aynı şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi de,

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^{\ s}_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

şeklinde olup, sonuç *(0,2)* tipli bir tensördür.

Şimdi de keyfi (p,q) tipli tensör için kovaryant türevi inceleyelim.

Keyfi *(p,q)* tipli $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferansiyeli, (2.24) eşitliğinden

$$\delta t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = (\partial_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}} \Gamma^{\ i_\lambda}_{ks} t^{i_1\ldots s\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{\ s}_{kj_\mu} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots s\ldots j_q}) du^k \tag{2.31}$$

şeklinde olur. Bu denklemin sol tarafı bir tensör olup du^k vektör olduğu için parantez içindeki ifade bu tensörün koordinatlarıdır. Böylece,

$$\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \partial_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}} \Gamma^{\ i_\lambda}_{ks} t^{i_1\ldots s\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{\ s}_{kj_\mu} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots s\ldots j_q} \tag{2.32}$$

denklemi elde edilir. Buna $t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir.

(p,q) tipli bir tensörün kovaryant türevinin *(p,q+1)* tipli bir tensör olduğu kovaryant türev tanımından görülür. Kovaryant türevin, tensörün kovaryantlık derecesini bir artırdığı söylenebilir.

Kovaryant türevin tanımından;

i. $\nabla_k(t^{i_1\ldots i_p}_{1\,j_1\ldots j_q} \mp t^{i_1\ldots i_p}_{2\,j_1\ldots j_q}) = \nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{1\,j_1\ldots j_q} \mp \nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{2\,j_1\ldots j_q}$

ii. $\nabla_k(\lambda t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}) = (\partial_k\lambda)t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \mp \lambda\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}, \quad \lambda \in F(M_n)$

iii. $\nabla_k(t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q} + t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1\ldots l_p}_{s_1\ldots s_q}$

iv. Tensörlerin kontraksiyon, simetrikleştirme ve alterneleştirme gibi işlemlerde mutlak diferansiyelleme kullanılarak işlem öncelik sırası değişebilir,
şeklinde özelikler yazılabilir (Bishop and Goldberg 1968).

Şimdi de afin konneksiyonun invaryant tanımını inceleyelim:

Tanım 2.5.1.2: $T^1_0(M_n)$, M_n manifoldunda vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y):\ T^1_0(M_n) \times T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

ile tanımlı dönüşüm,

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ konneksiyonuna afin (lineer) konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

ifadesine ise X vektör alanı yönündeki kovaryant diferansiyelleme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.5.2. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

Afin konneksiyonuna sahip A_n uzayında diferansiyellenebilir bir $f = f\left(u^1,...,u^n\right)$ fonksiyonu verilsin. Koordinatların dönüşümü durumunda bu fonksiyonun $df = \partial_k f du^i$ tam diferansiyeli invaryant kalır. Böylece df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olup bu lineer fonksiyonuna karşılık gelen kovektör; V_i, f fonksiyonunun gradienti ve bu fonksiyon da kovektörün potansiyel fonksiyonu olmak üzere,

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

olarak gösterilir.

Herhangi bir V_i kovektörünün keyfi bir skaler alanın gradientinin olması

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

gerek ve yeter şartına bağlıdır (Yano 1968).

Gradient kovektörü olan V_i nin kovaryant türevi,

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^{\ k}_{ji} V_k \tag{2.35}$$

şeklinde olup i ve j indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılarak, (2.34)'den

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.36}$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma\,{}^{k}_{[ij]} \tag{2.37}$$

olarak alınmıştır. (2.36) eşitliğinindeki kovaryant türev, (0,2) tipli bir tensör belirttiğinden S_{ij}^{k} nicelikleri de alt indislere göre antisimetrik olup (1,2) tipli tensörün bileşenlerini verir. S_{ij}^{k} tensörene A_n afin uzayının burulma veya torsion tensörü denir. Keyfi $X, Y \in A_n$ vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formu,

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Keyfi v^i vektörünün kovaryant türevi, (1,1) tipli tensör olup $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma\,{}^{i}_{sm} v^m$ şeklinde gösterilir. Bu tensörün de kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma\,{}^{i}_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma\,{}^{m}_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma\,{}^{i}_{sk} v^k) + \Gamma\,{}^{i}_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma\,{}^{m}_{sk} v^k) - \Gamma\,{}^{m}_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma\,{}^{i}_{sk} v^k + \Gamma\,{}^{i}_{sk} \partial_r v^k + \Gamma\,{}^{i}_{rm} \partial_s v^m + \Gamma\,{}^{i}_{rm} \Gamma\,{}^{m}_{sk} v^k - \Gamma\,{}^{m}_{rs} \nabla_m v^i
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemde r ve s indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2 S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
R^i_{rsk} &= \partial_r \Gamma\,{}^{i}_{sk} - \partial_s \Gamma\,{}^{i}_{rk} + \Gamma\,{}^{i}_{rm} \Gamma\,{}^{m}_{sk} - \Gamma\,{}^{i}_{sm} \Gamma\,{}^{m}_{rk} \\
&= 2(\partial_{[r} \Gamma\,{}^{i}_{s]k} + \Gamma\,{}^{i}_{[r|m|} \Gamma\,{}^{m}_{s]k})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak alınmıştır. $\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i$ ve $S^k_{rs}\nabla_k v^i$ tensör olup v^k keyfi vektör olduğu için R^i_{rsk}, (1,3) tipli tensör belirtir. Buna A_n uzayının Riemannian- Christoffel tensörü veya Eğrilik tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak;

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i \ , \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} &= R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} \\ &\quad - R^m_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} - \ldots - R^m_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} . \end{aligned} \tag{2.43}$$

formülleri yazılabilir. (2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Eğrilik tensörü invaryant formda keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.44}$$

şeklinde de yazılabilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.5.3. Konneksiyonların Dönüşümü

Afin konneksiyonu ile verilen keyfi iki uzayın difeomorfizmine bakalım. Bu iki uzay için uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilmesi, karşılıklı noktalarının koordinatlarının aynı olması ile mümkündür. Bu şekilde karşılık getirme işlemi, bir differensiyellenebilir X_n manifoldunda herhangi iki afin konneksiyonun verilmesi halinde de oluşturulabilir. Bu şekilde karşılık getirme işlemi, paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi veya konneksiyonların dönüştürülmesi olarak da değerlendirilebilir. Herhangi bir manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar alınabilir. Bir M_n manifoldunda,

sırasıyla, Γ_{ij}^{k} ve $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonlarını alalım. Keyfi bir v^i vektör alanının kovaryant türevleri bu konneksiyonlara göre

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^{i} v^m ,$$
$$\overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^{i} v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^{i} v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada T_{km}^{i},

$$T_{km}^{i} = \overline{\Gamma}_{km}^{i} - \Gamma_{km}^{i} \tag{2.46}$$

şeklinde tanımlıdır. (2.46) eşitliğinden T_{km}^{i} tensörünün (1,2) tipli tensör meydana getirdiği söylenebilir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü veya gerilme tensörü denir.

Teorem 2.5.3.1: Γ_{km}^{i}, ∇ afin konneksiyonunun katsayıları ve T_{km}^{i}, (1,2) tipli tensör olmak üzere $\overline{\Gamma}_{km}^{i}$ konneksiyon katsayıları da başka bir afin konneksiyonun katsayılarıdır (Kobayashi and Nomizu 1963).

İspat: (2.46)'dan

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k}$$

yazılabilir. Γ_{ij}^{k} katsayıları için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi durumunda

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'} \tag{2.47}$$

eşitliği elde edilir. Burada T_{ij}^{k} tensör olup tensör dönüşüm kuralından,

$$T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.48}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik (2.47) de kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'}$$

olur. Bu denklem, $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü yani konneksiyon dönüşüm kuralını sağladığını ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremden yararlanarak aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 2.5.3.1 Keyfi bir λ skaleri için, $\overset{1}{\Gamma}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}_{ij}^{k}$ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}_{ij}^{k} + \lambda \overset{2}{\Gamma}_{ij}^{k}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

ifadesinin de yine bir afin konneksiyonun katsayıları olduğu söylenebilir.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}_{ij}^{k}) \tag{2.50}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikteki $\overset{2}{\Gamma}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}_{ij}^{k}$ terimi tensör olduğu için Teorem 2.5.1. gözönüne alınırsa Γ_{ij}^{k} ifadesi afin konneksiyon belirtir. Yani kullanılan iki farklı konneksiyondan yeni bir konneksiyonun oluşturulduğu söylenebilir.

Özel olarak $\lambda = 1$ alınması durumunda,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

olur. $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonlarına göre $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonuna orta konneksiyon denir.

Sonuç 2.5.3.2 Γ^{k}_{ij} afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere $\widetilde{\Gamma}^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon belirtir.

İspat: Burulma tensörü

$$S^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji}\right)$$

şeklinde tanımlı olduğundan

$$\widetilde{\Gamma}^{k}_{ji} = \Gamma^{k}_{ji} + 2S^{k}_{ij}\,,\ \widetilde{\Gamma}^{k}_{ji} = \Gamma^{k}_{ji} \tag{2.52}$$

biçiminde yazılır. Teorem 2.5.1'e göre $\widetilde{\Gamma}^{k}_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon tayin eder. Burada kullanılan $\widetilde{\Gamma}^{k}_{ji}$ ve Γ^{k}_{ji} konneksiyon katsayıları karşılıklı konneksiyon olarak adlandırılır.

2.5.4. Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfır olup bu uzayların konneksiyon katsayıları aşağıdaki indislere göre simetriktir ve

$$\Gamma^{k}_{ji} = \ \Gamma^{k}_{ij} = \tilde{\Gamma}^{k}_{ij}$$

eşitliği geçerlidir. Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın herhangi bir eğrisel koordinat sistemine göre $\overset{\circ}{u}^1,...,\overset{\circ}{u}^n$ koordinatlarına sahip $O(\overset{\circ}{u}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verildiği eğrisel koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin de $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyon katsayıları ile verildiğini varsayalım. Bu şekilde oluşturulacak olan yeni koordinatları,

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}^q)\} \tag{2.53}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\delta^{i'}_k$, Kronecker sembolüdür. (2.53) ifadesi u^i den $u^{i'}$ ye difereniyellenebilir bir dönüşümdür. $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}^p),\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.54}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik *O* noktasında ve çevresinde $\det\left(A^{i'}_i\right) \neq 0$ şartını sağlar. Bu şartın sağlanması (2.53) dönüşümünün diferansiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfından olduğu söylenebilir. (2.54) eşitliklerindeki türev fonksiyonları *O* noktasında yazılırsa,

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i,\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.55}$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.27) ve (2.55) eşitlikleri kullanılarak, yeni koordinat sistemine göre *O* noktasındaki konneksiyon katsayılarının değerleri,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'}\delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

olur. Böylece burulması sıfır olan afin uzayın bütün noktalarında öyle bir koordinat sistemi vardır ki, bu sisteme göre konneksiyon katsayılarının bu noktadaki her bir değeri sıfır olur. (2.53) eşitliğinde verilen koordinatlar normal koordinat sistemi olarak ifade edilir.

Eğrilik tensörü için burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

ii. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

iii. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (2.Bianchi özdeşliği).

Bu eşitliklerin invaryant (tensör) karakter taşıdığı dikkate alınırsa, ispatlarını normal koordinat sistemini kullanarak incelemek hem daha kolay hemde yeterli olacaktır.

a_{ij} burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayda $(0,2)$ tipli, simetrik ve regüler bir tensör olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

biçiminde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilirse,

$$\begin{aligned}
&\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} = \nabla_k a_{ij},\\
&\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} = \nabla_i a_{jk},\\
&\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = \nabla_j a_{ki}.
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Buradaki son iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^{m} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. Bununda her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^{r} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

şeklinde olup buna a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları (Levi-Civita konneksiyonu) veya Christoffel sembolü denir. Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları; $(0,2)$ tipli, regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.5.4.1: A_n burulmasız afin konneksiyonlu uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}, e = e_{12\ldots n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

şeklinde olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması durumunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin uzay veya denk afin uzay denir.

Eş afin uzayın konneksiyonu, (2.60) kullanılarak

$$\delta e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \text{ ya da } \nabla_k e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

şeklinde bulunur. Bu şart,

$$\partial_k e_{i_1 \ldots i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

şeklinde de yazılabilir. (2.62) sisteminin bütün denklemleri *n*-vektörün antisimetrikliğine göre

$$\partial_k e_{12\ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12\ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

eşitliğine denk olur. $e_{12\ldots n} = e$ biçiminde yazılırsa (2.63) eşitliği kullanılarak

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

ifadesi yazılabilir. Eş afin uzay bu şekildeki bir koşul ile de karakterize edilebilir. Eş afin konneksiyonun katsayıları ile verilen Γ^s_{ks} toplamı gradiyenti verir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu $\ln e$ olacaktır.

Ricci tensörü,

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

denklemi ile verilir. Buradan eş afin konneksiyonun

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebileceği söylenebilir.

Eğrilik tensörünün burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzaylarda $R_{[rsk]}{}^{i} = 0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığı hesaba katılarak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliği yazılabilir. Son iki eşitlik, eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceği anlamına gelir.

Tanım 2.5.4.2: Burulması sıfır olan afin konneksiyonlu uzayın herhangi bir noktasındaki tanjant uzayında alınan g, (0,2) tipli simetrik tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması halinde korunuyorsa bu uzaya metrik uzay, (0,2) tipli simetrik g_{ij} tensörüne de metrik tensör adı verilir (Hacısalihoğlu 2003).

Tanım 2.5.4.3: g metrik tensörü regülerlik şartını sağlıyor ise yani,

$$\det(g_{ij}) \neq 0$$

şartı sağlanıyor ise bu uzaya Weyl uzayı denir ve W_n şeklinde işaretlenir (Hacısalihoğlu 2003).

Tanım 2.5.4.4: Weyl uzayının eş afin uzayı olması durumunda bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile işaretlenir (Hacısalihoğlu 2003).

Riemannian uzayının burulması sıfırdır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu,

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

denklemi ile verilir ve Riemannian konneksiyonunun katsayıları da

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

şeklinde verilir. Yani, g tensörünün Christoffel sembolleri ile Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları çakışır ve böyle katsayılarla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu denir. Ayrıca Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ancak burulması sıfır olmayan konneksiyonlar da vardır. Böyle konneksiyonlara metrik konneksiyon denir.

$R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ eşitliği göz önüne alınırsa Riemannian uzayında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i. $R_{(ij)kl} = 0$

ii. $R_{[ijk]l} = 0$

iii. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

iv. $R_{ij(kl)} = 0$

v. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

2.5.5. Riemannian Manifoldları

Tanım 2.5.5.1: Diferansiyellenebilir M manifoldundaki diferansiyellenebilir vektör alanların kümesi $\chi(M)$ olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M)$$

şeklinde tanımlı g bilineer formu $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

a) $g(X,Y) = g(Y,X),$ (Simetrik)

b) $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (Pozitif Tanımlı)

şartları sağlanırsa g bilineer formuna metrik tensör veya Riemann metriği denir. Bu durumda (M,g) ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir.

Lokal koordinatlarda ikinci şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g bilineer formunun bileşenleri g_{ij} olmak üzere g Riemann metriği için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 2.5.5.2: M bir manifold, g de simetrik, regüler bilineer form olmak üzere eğer ∇ lineer konneksiyonu, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

1) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlarsa Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyonu adını alır.

M manifoldu üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ & -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

şeklinde verilen Kozsul eşitliği ile belirlenir (O'neill 1983)

Teorem 2.5.5.1: Bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu vardır (Hacısalihoğlu 2003).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

C^{∞} sınıfından n boyutlu diferansiyellenebilir bir M_n manifoldunun bir P noktasındaki tanjant uzayı $T_P(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P(M_n) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $T(M_n)$ cümlesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$ tanjant demetinin herhangi bir $\widetilde{P} \in T_P(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tamamlayan

$$\pi : T(M_n) \to M_n$$
$$\widetilde{P} \to \pi(\widetilde{P}) = P$$

demet izdüşümü ($\widetilde{P} \to P$) karşılık getirir. $\pi^{-1}(P) = \widetilde{P} \in T_P(M_n)$ şeklinde tanımlanan kümeye, M_n baz uzayının P noktasındaki fibre denir.

Doğal olarak M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to T(M_n)$ ($\pi \circ f = I_{M_n}$, M_n de özdeşlik dönüşümü) kesiti bulunur. $T_P(M_n)$ tanjant uzayının sıfır vektörü, M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ değeridir. Bu $f : M_n \to T(M_n)$ kesiti veya $f(M_n)$ dönüşümünün görüntüsü, sıfır kesit olarak adlandırılır. $f(M_n)$, M_n baz uzayı ile aynı olduğu için M_n manifoldu, $T(M_n)$ tanjant demetinde diferansiyellenebilir imbedding olmuş veya içine daldırılmış altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), $U \subset M_n$ koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlar olsun. M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\pi^{-1} : U \subset M_n \to U \times R^n$ dönüşümü diferansiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde n-boyutlu vektör uzayıdır.

$P \in U$ noktası için $\widetilde{P} \in T_P(M_n)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterilir. $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri, $T_P(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}\left(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\widetilde{P}$ noktasını $y^h = x^{\bar{h}}$, $\bar{h} = n+1, ..., 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U koordinat komşuluğunda $\pi(\widetilde{P}) = P$'nin koordinatları x^h, $h = 1, ..., n$ ile gösterilirse, $\widetilde{P}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \to \widetilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemi elde edilir. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ koordinat sistemi, (x^h) dan indirgenmiş $\pi^{-1}(U)$ da bulunan koordinatlar olarak ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunda $\pi(\widetilde{P}) = P$ noktasını kapsayan bir diğer koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuda $\widetilde{P}$ noktasını içerir. $\widetilde{P}$ nin indirgenmiş koordinatları $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuna göre $(x^{h'}, y^{h'})$ ile gösterilir. Koordinatlar arasındaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x^h), \\ x^{\bar{h}'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h, \end{cases} \tag{3.2}$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973).

$x^{h'}\left(x^{h}\right)$, $P \in M_n$ noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^{∞} sınıfından diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^{h}$, $x^{\bar{h'}} = y^{h'}$ olarak alınırsa (3.2) denklemi,

$$x^{p'} = x^{p'}\left(x^{p}\right) \tag{3.3}$$

biçiminde yazılır. (3.2) dönüşümüne ait Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\right) = \begin{pmatrix} A_h^{h'} & 0 \\ A_{h\varepsilon}^{h'} y^{\varepsilon} & A_h^{h'} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

olarak tanımlıdır. Burada $A_h^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}$, $A_{h\varepsilon}^{h'} = \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h} \partial x^{\varepsilon}}$ eşitlikleri alınmıştır.

(3.2) dönüşümünün tersi,

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}\left(x^{h'}\right), \\ x^{\bar{h}} = \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} y^{h'}, \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}\left(x^{p'}\right) \tag{3.6}$$

olarak yazılabilir. (3.5) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\right) = \begin{pmatrix} A_{h'}^{h} & 0 \\ A_{h'\varepsilon'}^{h} y^{\varepsilon'} & A_{h'}^{h} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ile verilir. (3.4) ile (3.7) matrisleri $T\left(M_n\right)$ tanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu ifade eder (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldundaki (r,s) tipli C^∞ sınıfından tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M_n)$ ve M_n üzerindeki tüm tensör alanlarının kümesi ise $\Im(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(T(M_n))$ ve tüm tensör alanlarının kümesi ise $\Im(T(M_n))$ ile gösterilir.

3.1.1. Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ve $f:M_n\to R$, $\pi:T(M_n)\to M_n$ olmak üzere, ${}^vf=f\circ\pi$, ${}^vf:T(M_n)\to R$ şeklinde tanımlı ${}^vf$ fonksiyonuna $T(M_n)$ tanjant demetinde f fonksiyonunun dikey lifti denir. Burada $\widetilde{P}\in\pi^{-1}(U)$ ve $\widetilde{P}=(x^i,y^i)=(x^i,x^{\bar{i}})$ olmak üzere,

$$ {}^vf(\widetilde{P})={}^v f(x,y)=f\circ\pi(\widetilde{P})=f(P)=f(x) \tag{3.8}$$

olur. Buradan ${}^vf(\widetilde{P})$ değerinin fibre boyunca sabit ve $P=\pi^{-1}(\widetilde{P})\in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşit olduğunu söyleyebiliriz (Yano and Ishihara 1973).

3.1.2. Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti

$X\in\Im_0^1(M_n)$, M_n manifoldunda keyfi bir vektör alanı olmak üzere,

$$ {}^vX(\iota\omega)={}^v(\omega(X)) \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlanan ${}^vX$ vektör alanı, $T(M_n)$ tanjant demetinde X vektör alanının dikey lifti olarak adlandırılır.

X vektör alanının dikey lifti olan ${}^{v}X$ vektör alanının $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{v}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{3.10} $$

ile verilir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.3. Tanjant Demette 1-Formun Dikey Lifti

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$, M_n manifoldu üzerinde 1-form (kovektör alanı) olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^{v}\omega = (\omega_h, 0) \tag{3.11} $$

şeklinde olan ${}^{v}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formuna, ω nın dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Ayrıca her $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde (3.11) eşitliğinden 1-formun dikey lifti,

$$ {}^{v}(dx^h) = dx^h \tag{3.12} $$

şeklindedir. Burada (dx^h) 1-formdur (Yano and Ishihara 1973).

3.1.4. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Dikey Lifti

(3.8), (3.9) ve (3.11) eşitlikleri ile tanımlanan dikey liftler; sırasıyla, sabit katsayılara göre $\Im_0^0(M_n)$ nin $\Im_0^0(T(M_n))$ ye, $\Im_0^1(M_n)$ nin $\Im_0^1(T(M_n))$ ve $\Im_1^0(M_n)$ nin $\Im_1^0(T(M_n))$ ye lineer izomorfim olduğunu belirler. Böylece,

$$^V(P\otimes Q)=^V P\otimes^V Q,\quad ^V(P+R)=^V P+^V R \tag{3.13}$$

şartı ile sabit katsayılara göre $\Im(M_n)$ tensör cebrinin $\Im(T(M_n))$ tensör cebrine bir tek cebirsel izomorfizm ile dikey liftlere genişletilebilir. Burada P,Q ve R, $\Im(M_n)$ nin keyfi elemanlarıdır. (3.13) eşitlikleri kullanılarak $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre, F_i^h lokal bileşenlerine sahip bir $F\in\Im_1^1(M_n)$ afinor alanının ^VF dikey lifti,

$$^VF=\begin{pmatrix}0 & 0\\ F_i^h & 0\end{pmatrix} \tag{3.14}$$

biçimindedir.

G_{ji} bileşenlerine sahip bir $G\in\Im_2^0(M_n)$ tensör alanının ^VG dikey lifti,

$$^VG=\begin{pmatrix}G_{ji} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

biçimindedir.

H^{ih} bileşenlerine sahip bir $H\in\Im_0^2(M_n)$ tensör alanının dikey lifti,

$$^VH=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & H^{ih}\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Gerçekten, (3.8), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}^{V}F &= {}^{V}\left(F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i\right) \\ &= {}^{V}\left(F_i^h\right)^{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^i\right) \\ &= F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.14) eşitliğini verir. Benzer olarak (3.15) ve (3.16) eşitlikleride gösterilebilir.

3.1.5. Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti

$T\left(M_n\right)$ tanjant demetinde $f \in \Im_0^0\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$\imath(df) = y^s \partial_s f = \partial f = {}^{C} f$$

şeklindedir. Burada ${}^{C}f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.6. Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti

$X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$, M_n manifoldunda bir vektör alanı olmak üzere $T\left(M_n\right)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olan ${}^{C}X \in \Im_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanı X vektör alanının tam lifti olarak adlandırılır (Yano and Ishihara 1973).

Her $\pi^{-1}\left(U\right)$ açık kümesinde (3.17) eşitliğinden

$$ {}^{C}\left(\partial_h\right) = \partial_h \tag{3.18}$$

denklemi sağlanır (Yano and Ishihara 1973).

3.1.7. Tanjant Demette Tensör Alanlarının Tam Lifti

$$ {}^{C}\left(P \otimes Q\right) = {}^{C}P \otimes^{V} Q + {}^{V}P \otimes^{C} Q, \quad {}^{C}\left(P+R\right) = {}^{C}P + {}^{C}R \tag{3.19}$$

şartı ile sabit katsayılara göre $\Im\left(M_n\right)$ tensör cebrinin $\Im\left(T(M_n)\right)$ tensör cebrine bir tek cebirsel izomorfizm ile tam liftlere genişletilebilir. Burada P,Q ve R, $\Im\left(M_n\right)$ nin keyfi elemanlarıdır.

(3.19) eşitlikleri kullanılarak $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre;

F_i^h lokal bileşenlerine sahip bir $F \in \Im_1^1\left(M_n\right)$ afinor alanının ${}^{C}F$ tam lifti,

$$ {}^{C}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

biçimindedir.

G_{ji} bileşenlerine sahip bir $G \in \Im_2^0\left(M_n\right)$ tensör alanının ${}^{C}G$ tam lifti,

$$ {}^{C}G = \begin{pmatrix} \partial G_{ji} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

biçimindedir.

H^{ih} bileşenlerine sahip bir $H \in \Im_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^C H$ tam lifti,

$$ {}^C H = \begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \\ H^{ih} & \partial H^{ih} \end{pmatrix} \tag{3.22} $$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Gerçekten, (3.8), (3.9), (3.12) ve (3.18) denklemlerinden

$$ \begin{aligned} {}^C F &= {}^C (F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i) \\ &= {}^C \left(F_i^h\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) \otimes^V \left(dx^i\right) + {}^V \left(F_i^h\right)^C \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) \otimes^V \left(dx^i\right) + {}^V \left(F_i^h\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right) \otimes^C \left(dx^i\right) \\ &= {}^C \left(F_i^h\right) \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i + {}^V \left(F_i^h\right) \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + {}^V \left(F_i^h\right) \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^h \end{aligned} $$

olur. Bu ifade (3.20) eşitliğini verir. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri de benzer olarak gösterilebilir.

3.1.8. $\gamma -$ Operatörü

M_n manifoldu üzerinde F bir afinor alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı,

$$ \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s F_s^h \end{pmatrix} \tag{3.23} $$

ile tanımlanır.

$T \in \Im_2^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ olmak üzere $T\left(M_n\right)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre $\gamma T \in \Im_1^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ afinor alanı,

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^s T_{s\ h}^{h} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

3.1.9. Yatay Lift

Diferansiyellenebilir M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyon verilsin. Keyfi $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için

$$^{H}X = {}^{C}X - (\nabla_\gamma X) \tag{3.25}$$

ile tanımlanan $^{H}X \in \Im_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının $T\left(M_n\right)$ tanjant demete yatay lifti denir. Burada $(\nabla_\gamma X) = \gamma(\nabla X)$ şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X vektör alanının ^{H}X yatay liftinin, $T\left(M_n\right)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

şeklindedir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^s \Gamma_{s\ i}^{\ h} \tag{3.27}$$

eşitliği geçerlidir.

$F \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanının $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki ${}^{H}F$ yatay lifti,

$$ {}^{H}F = {}^{C}F - (\nabla_\gamma F) \tag{3.28} $$

ile tanımlı olup $\nabla_\gamma F$,

$$ (\nabla_\gamma F) = y^s \nabla_s F_i^h \partial_{\bar{i}} \otimes dx^h \tag{3.29} $$

şeklinde tanımlıdır. F afinor alanının ${}^{H}F$ yatay liftinin $T(M_n)$ tanjant demet üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_s^h F_i^s + \Gamma_i^s F_s^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{3.30} $$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğu sonucu çıkar.

Benzer olarak; $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^{H}G$ yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}G = \begin{pmatrix} \Gamma_j^t G_{ti} + \Gamma_i^t G_{jt} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31} $$

bileşenlerine sahiptir. Aynı şekilde $H \in \Im_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^{H}H$ yatay liftinin $T(M_n)$ tanjant demetteki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}H = \begin{pmatrix} 0 & H^{ji} \\ H^{ji} & -\Gamma_t^j H^{ti} - \Gamma_t^i H^{jt} \end{pmatrix} \tag{3.32} $$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğu söylenebilir (Yano and Ishihara 1973).

3.2. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Tam Liftleri

M_n, ∇ afin konneksiyonu ile verilen bir manifold olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde bir tek ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonu vardır ve her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\,{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_X Y) \tag{3.33} $$

şeklinde tanımlanır. Γ_{ji}^{h}, M_n de (x^h) lokal koordinatlarına göre ∇ nın bileşenleri ve $\tilde{\Gamma}_{CB}{}^{A}$, $T(M_n)$ de $(\mathrm{x}^h, \mathrm{y}^h)$ indirgenmiş koordinatlarına göre ${}^{C}\nabla$ nin bileşenleri olsun. X ve Y, M_n deki (x^h) lokal koordinatlarına göre X^h ve Y^h bileşenlerine sahip keyfi vektör alanları olsun. O zaman ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$, $T(M_n)$ de $(\mathrm{x}^h, \mathrm{y}^h)$ indirgenmiş koordinatlarına göre;

$$ {}^{C}X : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^h \\ \widetilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}, \quad {}^{C}\mathrm{Y} : \begin{pmatrix} Y^h \\ \partial Y^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Y}^h \\ \widetilde{Y}^{\bar{h}} \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahip olur. Bu bileşenler kullanılarak (3.33) eşitliği, aşağıdaki formlarda da yazılabilir.

$$ \widetilde{X}^j(\partial_j \widetilde{Y}^h + \tilde{\Gamma}_{ji}{}^{h}\widetilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}{}^{h}\widetilde{Y}^{\bar{i}}) + \widetilde{X}^{\bar{j}}(\partial_{\bar{j}} \widetilde{Y}^h + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}{}^{h}\widetilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}{}^{h}\widetilde{Y}^{\bar{i}}) = \mathrm{X}^j(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{h} Y^i) $$

ve

$$ \widetilde{X}^j(\partial_j \widetilde{Y}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}_{ji}{}^{\bar{h}}\widetilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}{}^{h}\widetilde{Y}^{\bar{i}}) + \widetilde{X}^{\bar{j}}(\partial_{\bar{j}} \widetilde{Y}^{\bar{h}} + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}{}^{\bar{h}}\widetilde{Y}^i + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}{}^{\bar{h}}\widetilde{Y}^{i}) = y^k \partial_k \left\{ \mathrm{X}^j(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{h} Y^i) \right\}. $$

Buradan,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Gamma}_{ji}^{\ h} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\ h} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\ h} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ h} = 0, \\
&\widetilde{\Gamma}_{ji}^{\ \bar{h}} = \partial\Gamma_{ji}^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\ \bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\ \bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ \bar{h}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde konneksiyon katsayıları elde edilir. (3.34) ile tanımlanan $\widetilde{\Gamma}_{CB}^{\ A}$ nin global olarak $T\left(M_n\right)$ de bir afin konneksiyon belirlediği (3.4) ve (3.7)'den kolaylıkla doğrulatılabilir. Bu afin konneksiyon $T\left(M_n\right)$ de ∇ afin konneksiyonunun tam lifti olarak adlandırılır ve ${}^{C}\nabla$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.1: T ve R, sırasıyla, ∇ konneksiyonunun burulma ve eğrilik tensörleri olmak üzere ${}^{C}T$ ve ${}^{C}R$, sırasıyla, ${}^{C}\nabla$ nin burulma ve eğrilik tensörleridir (Yano and Kabayashi 1966).

İspat: $\forall X, Y \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için

$$\begin{aligned}
{}^{C}T({}^{C}\mathrm{X},{}^{C}\mathrm{Y}) &= {}^{C}\left(T(\mathrm{X},\mathrm{Y})\right) \\
&= {}^{C}\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\right) \\
&= {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Y - {}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}{}^{C}X - \left[{}^{C}X,{}^{C}Y\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
{}^{C}R({}^{C}\mathrm{X},{}^{C}\mathrm{Y})^{C}\mathrm{Z} &= {}^{C}\left(R(X,Y)Z\right) \\
&= {}^{C}\left(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,\mathrm{Y}]}Z\right) \\
&= {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}{}^{C}Z - {}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}{}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Z - {}^{C}\nabla_{\left[{}^{C}X,{}^{C}\mathrm{Y}\right]}{}^{C}Z
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ${}^{C}T$ ve ${}^{C}R$ nin bileşenlerini bulalım. T nin T^{h}_{ji} ve R nin R^{h}_{kji} bileşenleri, sırasıyla,

$$T^{h}_{ji} = \Gamma^{h}_{ji} - \Gamma^{h}_{ij},$$

$$R^{h}_{kji} = \partial_{k}\Gamma^{h}_{ji} - \partial_{j}\Gamma^{h}_{ki} + \Gamma^{h}_{kt}\Gamma^{t}_{ji} - \Gamma^{h}_{jt}\Gamma^{t}_{ki}$$

olmak üzere $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}T$ nin $\widetilde{T}_{CB}{}^{A}$ bileşenleri

$$\widetilde{T}^{h}_{ji} = T^{h}_{ji}, \widetilde{T}^{\bar{h}}_{ji} = \partial T^{h}_{ji}, \widetilde{T}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = T^{h}_{ji}, \widetilde{T}^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = T^{h}_{ji} \tag{3.35}$$

olup diğerleri sıfır olarak bulunur. ${}^{C}R$ nin $\widetilde{R}_{DCB}{}^{A}$ bileşenleri de

$$\widetilde{R}^{h}_{kji} = R^{h}_{kji}, \quad \widetilde{R}^{\bar{h}}_{kji} = \partial R^{h}_{kji}, \quad \widetilde{R}^{\bar{h}}_{kj\bar{i}} = R^{h}_{kji}, \quad \widetilde{R}^{\bar{h}}_{k\bar{j}i} = R^{h}_{kji}, \quad \widetilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}ji} = R^{h}_{kji} \tag{3.36}$$

olup diğerleri sıfır olarak bulunur.

$\forall \widetilde{f} \in \Im^{0}_{0}(T(M_n))$ ve $\forall \widetilde{X} \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ için ${}^{C}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{f} = \widetilde{X}\widetilde{f}$ olduğundan Teorem 3.2.2 yazılabilir.

Teorem 3.2.2: $f \in \Im^{0}_{0}(M_n)$ ve $X \in \Im^{1}_{0}(M_n)$ olmak üzere

i. ${}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}f = 0$

ii. ${}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{C}f = {}^{V}(\nabla_{X}f)$ (3.37)

iii. ${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{V}f = {}^{V}(\nabla_{X}f)$

iv. ${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}f = {}^{C}(\nabla_{X}f)$

eşitlikleri geçerlidir (Yano and Ishihara 1973).

İspat: $\nabla_X f = Xf$ ve $X^m \nabla_m f = X^m \partial_m f = Xf$ denklemlerinden yararlanarak,

i. $f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C\nabla_{{}^V X}{}^V f &= {}^V X^M \, {}^C\nabla_M {}^V f \\ &= {}^V X^m \, {}^C\nabla_m {}^V f + {}^V X^{\bar{m}} \, {}^C\nabla_{\bar{m}} {}^V f \\ &= \underbrace{{}^V X^m}_{0} \partial_m f + {}^V X^{\bar{m}} \underbrace{\partial_{\bar{m}} f}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C f &= {}^V X^M \, {}^C\nabla_M {}^C f \\ &= {}^V X^m \, {}^C\nabla_m {}^C f + {}^V X^{\bar{m}} \, {}^C\nabla_{\bar{m}} {}^C f \\ &= \underbrace{{}^V X^m}_{0} \partial_m (y^s \partial_s f) + {}^V X^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}} (y^s \partial_s f) \\ &= X^m \partial_{\bar{m}} (y^s \partial_s f) \\ &= X^m \delta_m^s \partial_s f \\ &= X^s \partial_s f \\ &= {}^V (Xf) \\ &= {}^V (\nabla_X f) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ ve $X \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^C\nabla_{{}^C X}{}^V f &= {}^C X({}^V f) \\ &= {}^C X^M \partial_M {}^V f \\ &= {}^C X^m \partial_m {}^V f + {}^C X^{\bar{m}} \underbrace{\partial_{\bar{m}} {}^V f}_{0} \end{aligned}$$

$$= X^m \partial_m f$$

$$= X^m \partial_m f$$

$$=^V (Xf)$$

$$=^V \left(\nabla_X f\right)$$

elde edilir.

iv. $f \in \Im_0^0\left(M_n\right)$ ve $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$^C\nabla_{^C X}\,{}^C f =^C X^M \partial_M\,{}^C f$$

$$=^C X^m \partial_m\,{}^C f +^C X^{\bar{m}} \partial_{\bar{m}}\,{}^C f$$

$$= X^m \partial_m (\mathrm{y}^s\, \partial_s f) + (\mathrm{y}^s\, \partial_s X^m)\partial_{\bar{m}} (\mathrm{y}^\ell\, \partial_\ell f)$$

$$= \mathrm{y}^s\, X^m \partial_m \partial_s f + (\mathrm{y}^s\, \partial_s X^m)\delta_m^\ell \partial_\ell f$$

$$= \mathrm{y}^s\, X^m \partial_s \partial_m f + (\mathrm{y}^s\, \partial_s X^m)\partial_m f$$

$$= \mathrm{y}^s\, \partial_s (X^m \partial_m f)$$

$$=^C (Xf)$$

$$=^C \left(\nabla_X f\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3: Her $X, Y \in \Im_0^1\left(M\right)$ için

i. $$^C\nabla_{^V X}\,{}^V Y = 0 \qquad (3.38)$$

ii. $$^C\nabla_{^C X}\,{}^V Y =^V \left(\nabla_X Y\right)$$

eşitlikleri geçerlidir (Yano and Ishihara 1973).

İspat: X^h ve Y^h, sırasıyla, M de verilen (x^h) lokal koordinatlarına göre X ve Y nin bileşenleri olsun. X ve Y nin $T(M)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenleri,

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^h \end{pmatrix}, \quad {}^{V}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ y^h \end{pmatrix}, \quad {}^{C}X = \begin{pmatrix} x^h \\ \partial x^h \end{pmatrix}, \quad {}^{C}Y = \begin{pmatrix} y^h \\ \partial y^h \end{pmatrix} $$

olmak üzere,

i.

${}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y$ nin ilk n bileşeni

$$ X^j(\tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ h} Y^i) = 0 $$

ve son n bileşeni (3.34) eşitliklerinden

$$ X^j(\partial_{\bar{j}} Y^h + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ \bar{h}} Y^i) = 0 $$

şeklinde olup ${}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0$ olarak bulunur.

ii.

${}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{C}Y$ nin ilk n bileşeni

$$ X^j(\partial_{\bar{j}} Y^h + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ h} Y^i + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ h} \partial Y^i) = 0 $$

ve son n bileşeni (3.34) eşitliklerinden

$$ X^j(\partial_{\bar{j}} \partial Y^h + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ \bar{h}} Y^i + \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\ \bar{h}} \partial Y^i) = X^j(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{\ h} Y^i) $$

şeklinde olup, ${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{V}Y = {}^{V}\left(\nabla_X Y\right)$ eşitliği elde edilir.

3.3. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Lie Türevi ve İnfinitesimal afin Dönüşümler

M manifoldunda bir X vektör alanı ve ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. X vektör alanına göre ∇ konneksiyonunun Lie türevi $L_X\nabla$, $\forall Y,Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$\left(L_X\nabla\right)\left(Y,Z\right) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{3.39}$$

şeklinde tanımlı olup $\Im_2^1(M)$ nin bir elemanıdır.

Teorem 3.3.1: ∇, M manifoldunda bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall X \in \Im_0^1(M)$ için

i. ${L_{{}^{V}X}}{}^{C}\nabla = {}^{V}(L_X\nabla)$

ii. ${L_{{}^{C}X}}{}^{C}\nabla = {}^{C}(L_X\nabla)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

i. $\forall X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned}
({L_{{}^{V}X}}{}^{C}\nabla)({}^{C}\mathrm{Y},{}^{C}\mathrm{Z}) &= L_{{}^{V}X}({}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}{}^{C}\mathrm{Z}) - {}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}(L_{{}^{V}X}{}^{C}\mathrm{Z}) - {}^{C}\nabla_{{}^{V}[\mathrm{X},{}^{C}Y]}{}^{C}\mathrm{Z} \\
&= {L_{{}^{V}X}}{}^{C}(\nabla_Y \mathrm{Z}) - {}^{C}\nabla_{{}^{C}Y}{}^{V}(L_X \mathrm{Z}) - {}^{C}\nabla_{{}^{V}[\mathrm{X},Y]}{}^{C}\mathrm{Z} \\
&= {}^{V}\left(L_X(\nabla_Y \mathrm{Z}) - \nabla_Y(L_X \mathrm{Z}) - \nabla_{[\mathrm{X},Y]}\mathrm{Z}\right) \\
&= {}^{V}\left((L_X\nabla)(Y,Z)\right)
\end{aligned}$$

$$=^{V} (L_X \nabla)(^{C}Y, ^{C}Z)$$

elde edilir.

ii. $\forall X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned}(L_{^{C}X}{}^{C}\nabla)(^{C}\mathrm{Y}, ^{C}\mathrm{Z}) &= L_{^{C}X}(^{C}\nabla_{^{C}Y}{}^{C}\mathrm{Z}) - ^{C}\nabla_{^{C}Y}(L_{^{C}X}{}^{C}\mathrm{Z}) - ^{C}\nabla_{[^{C}\mathrm{X}, ^{C}Y]}{}^{C}\mathrm{Z} \\ &= L_{^{C}X}{}^{C}(\nabla_Y \mathrm{Z}) - ^{C}\nabla_{^{C}Y}{}^{C}(L_X \mathrm{Z}) - ^{C}\nabla_{^{C}[\mathrm{X},Y]}{}^{C}\mathrm{Z} \\ &= ^{C}\left(L_X(\nabla_Y \mathrm{Z}) - \nabla_Y(L_X \mathrm{Z}) - \nabla_{[\mathrm{X},Y]}\mathrm{Z}\right) \\ &= ^{C}\left((L_X\nabla)(Y,Z)\right) \\ &= ^{C}(L_X\nabla)(^{C}Y, ^{C}Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

∇ afin konneksiyonlu bir manifoldda eğer $L_X\nabla = 0$ ise X^α bileşenleri ile verilen X vektör alanı infinitesimal afin dönüşüm olarak adlandırılır. $\Gamma_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ bileşenleri açısından X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_\gamma\partial_\beta X^\alpha + X^\lambda\partial_\lambda\Gamma_{\lambda\beta}{}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\beta}{}^{\lambda}\partial_\lambda X^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}{}^{\alpha}\partial_\gamma X^\lambda + \Gamma_{\gamma\lambda}{}^{\alpha}\partial_\beta X^\lambda = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada X^α lar X in lokal bileşenleridir.

M manifoldunda $\Gamma_{ji}{}^{k}$ konneksiyon katsayılarına sahip bir ∇ konneksiyonu ve $T(M)$ tanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre $\begin{pmatrix}\widetilde{X}^h \\ \widetilde{X}^{\bar{h}}\end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\widetilde{X}$ vektör alanı verilmiş olsun. (3.34)'deki konneksiyon katsayıları kullanılarak, $\widetilde{X}$ vektör alanının $^{C}\nabla$ ile $T(M)$ tanjant demetinde bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu aşağıdaki eşitliklerden kolaylıkla görülür.

i. $\partial_j \partial_i \widetilde{X}^h + \widetilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}{}^h - (\Gamma_{ji}{}^k \partial_k \widetilde{X}^h + \partial \Gamma_{ji}{}^k \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^h) + \Gamma_{ki}{}^h \partial_j \widetilde{X}^k + \Gamma_{jk}{}^h \partial_i \widetilde{X}^k = 0$

ii. $\partial_j \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^h - \Gamma_{ji}{}^k \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^h + \Gamma_{jk}{}^h \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^k = 0$

iii. $\partial_{\bar{j}} \partial_i \widetilde{X}^h - \Gamma_{ji}{}^k \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^h + \Gamma_{ki}{}^h \partial_{\bar{j}} \widetilde{X}^k = 0$

iv. $\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^h = 0$

v. $\partial_j \partial_i \widetilde{X}^{\bar{h}} + (\widetilde{X}^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}{}^h + \widetilde{X}^{\bar{k}} \partial_k \Gamma_{ji}{}^h) - (\Gamma_{ji}{}^k \partial_k \widetilde{X}^{\bar{h}} + \partial \Gamma_{ji}{}^k \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^{\bar{h}})$

$+(\partial \Gamma_{ki}{}^h \partial_j \widetilde{X}^k + \Gamma_{ki}{}^h \partial_j \widetilde{X}^{\bar{k}}) + (\partial \Gamma_{jk}{}^h \partial_i \widetilde{X}^k + \Gamma_{jk}{}^h \partial_i \widetilde{X}^{\bar{k}}) = 0$

vi. $\partial_j \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^{\bar{h}} + \widetilde{X}^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}{}^h - \Gamma_{ji}{}^h \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^{\bar{k}} + \Gamma_{ki}{}^h \partial_j \widetilde{X}^k + (\partial \Gamma_{jk}{}^h \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^k + \Gamma_{jk}{}^h \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^{\bar{k}}) = 0$

vii. $\partial_{\bar{j}} \partial_i \widetilde{X}^{\bar{h}} + \widetilde{X}^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}{}^h - \Gamma_{ji}{}^h \partial_{\bar{k}} \widetilde{X}^{\bar{k}} + \Gamma_{jk}{}^h \partial_i \widetilde{X}^k + (\partial \Gamma_{ki}{}^h \partial_{\bar{j}} \widetilde{X}^k + \Gamma_{ki}{}^h \partial_{\bar{j}} \widetilde{X}^{\bar{k}}) = 0$

viii. $\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}{}^h \partial_{\bar{j}} \widetilde{X}^k + \Gamma_{jk}{}^h \partial_{\bar{i}} \widetilde{X}^k = 0$

3.4. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Yatay Liftleri

M manifoldunda bir ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Yatay liftin (3.25) tanımı göz önüne alınırsa (3.38) eşitliklerinden, $\forall X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

i. ${}^C\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \gamma(R(\ ,X)Y)$

ii. ${}^C\nabla_{{}^C X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \gamma(R(\ ,X)Y)$

iii. ${}^C\nabla_{{}^H X}{}^C Y = {}^C(\nabla_X Y) - \gamma((\nabla Y)(\nabla X))$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $R(\ ,X)Y$, M de (1,1) tipli bir W tensör alanı olmak üzere her $Z \in \Im_0^1(M)$ için $W(Z) = R(Z,X)Y$ olup R, ∇ nın eğrilik tensörüdür.

Ayrıca $\forall X,Y \in \Im_0^1(M)$ için

i. ${}^C\nabla_{{}^V X}{}^H Y = 0$

ii. ${}^C\nabla_{{}^H X}{}^V Y = {}^V(\nabla_X Y)$

eşitlikleri de sağlanır.

3.5. Yarı-Tanjant Demet

M_n ve B_m diferansiyellenebilir manifoldları, sırasıyla, n ve m boyutlu C^∞ sınıfından manifoldlar ve (M_n, π_1, B_m),

$$\pi_1 : M_n \to B_m$$

submersionu ile tanımlanan diferansiyellenebilir bir demet olmak üzere bu demette kullanılan indisler $i,j,... = 1,2,...,n$; $a,b,... = 1,...,n-m$; $\alpha,\beta,... = n-m+1,...,n$ olacak şekilde $(x^a, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemini inceleyelim. Burada x^α koordinatları B_m baz manifoldunun lokal koordinatları, x^a ise, keyfi $\pi_1 : M_n \to B_m$ demetinin fibre koordinatlarıdır. $(x^{a'}, x^{\alpha'})$ bu demetteki bir diğer lokal koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), \end{cases} \tag{3.48}$$

dönüşümü yazılır. Bu dönüşüme karşılık gelen jakobi matrisi,

$$\left(A_j^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

ile tanımlıdır.

$T_x(B_m)$, B_m baz manifoldunun $(x=\pi_1(\tilde{x}), \tilde{x}=\left(x^a, x^\alpha\right)\in M_n)$ şeklinde tanımlı bir x noktasındaki tanjant uzayı olsun. X vektör alanının bileşenleri, $T_x(B_m)$ tanjant uzayındaki $\{\partial_\alpha\}$ doğal çatısına göre, $X^\alpha = dx^\alpha\left(X\right)$ olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde koordinatları $(x^I)=(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ olarak verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti elde edilir. Burada $(x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha,\ \bar{\alpha}=\alpha+m,\ I=1,...,n+m)$ olarak alınmıştır (Duc 1979; Vishnevskii *et al*. 1985).

B_m manifoldunda doğal demet yapısına ve $\pi:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\to(x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi: t(B_m)\to B_m$ izdüşümüne sahip olan $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin, eğer $\pi_2:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\to(x^a, x^\alpha)$ koordinatları ile $\pi_2: t(B_m)\to M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa, o zaman M_n manifoldunda da bir demet yapısına sahip olduğu söylenebilir. Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

Ayrıca $\left(t\left(B_m\right), \pi_1\circ\pi_2\right)$ yarı-tanjant demeti karma demet Poor (1981) ya da step-like demeti belirtir (Ostianu 1974).

M_n nin lokal koordinatlarının (3.48) deki dönüşüme göre, $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde belirttiği koordinat dönüşümü,

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right), \\ x^{\bar{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} x^{\bar{\beta}}, \end{cases} \tag{3.49}$$

şeklinde olup bu koordinat dönüşümüne karşılık gelen jakobi matrisi,

$$\overline{A} = A_J^{I'} = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{\alpha'} y^\alpha & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

ile tanımlıdır. Burada $I = (x^a, x^\alpha, x^{\overline{\alpha}}), J = (x^b, x^\beta, x^{\overline{\beta}}), \mathrm{I, J} .... = 1, ..., 2\,\mathrm{n}; A_{\beta\varepsilon}^{a'} = \dfrac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}$ şeklindedir (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

(3.50) de belirtilen blok matrisinin asal köşegeni üzerinde yer alan her matris için

$$Det(A_b^{a'}) \neq 0 \ , \ Det(A_\beta^{\alpha'}) \neq 0$$

eşitlikleri geçerli olduğundan $Det\overline{A} \neq 0$ olur. (3.49) verilen dönüşümünün tersi

$$\begin{cases} x^a = x^a\left(x^{b'}, x^{\beta'}\right), \\ x^\alpha = x^\alpha\left(x^{\beta'}\right), \\ x^{\overline{\alpha}} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} y^{\beta'}, \end{cases} \tag{3.51}$$

şeklinde tanımlı olup (3.51) dönüşümüne karşılık gelen Jakobi matrisi

$$A_I^{J'} = \begin{pmatrix} A_{b'}^a & A_{\beta'}^a & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta'\varepsilon'}^\alpha y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^\alpha \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

şeklindedir.

Yarı-tanjant demette boyut $\dim t(B_m) = n + m$ olarak verilir (Duc 1979; Vishnevskii *et al*. 1985). Ayrıca özel olarak $n = m$ alınırsa $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, $T(M_n)$ tanjant demetine dönüşür (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

$F(B_m)$, B_m manifoldundaki C^∞ sınıfından gerçel değerli fonksiyonların modülü olmak üzere, B_m manifoldundaki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(B_m)$ üzerindeki modülü $\Im(B_m)=\sum_{p,q=0}^{\infty}\Im_q^p(B_m)$ olarak gösterilir. Benzer şekilde, $F(M_n)$, M_n manifoldundaki C^∞ sınıfından gerçel değerli fonksiyonların modülü olmak üzere, M_n manifoldundaki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\Im(M_n)=\sum_{p,q=0}^{\infty}\Im_q^p(M_n)$ olarak gösterilir.

3.5.1. Yarı-Tanjant Demette Fonksiyonun Dikey Lifti

$\pi:t(B_m)\to B_m$ ve ${}^{v}f=f\circ\pi_1$ dönüşümleri ile tanımlanan f fonksiyonunun dikey lifti $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerinde,

$$ {}^{vv}f={}^{v}f\circ\pi_2=f\circ\pi_1\circ\pi_2=f\circ\pi \tag{3.53}$$

şeklindedir. Buradan,

$$ {}^{vv}f(x^a,x^\alpha,\overline{x^\alpha})=f(x^\alpha)$$

elde edilir. Böylece ${}^{vv}f$ değeri, $\pi:t(B_m)\to B_m$ izdüşümündeki her bir fibre boyunca sabit olup ${}^{vv}f$ ye f fonksiyonunun dikey lifti denir (Ay 2013).

3.5.2. Yarı-Tanjant Demette Vektör Alanının Dikey Lifti

$\widetilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$, $X=X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ izdüşümüyle verilen, $\widetilde{X}=\widetilde{X}^a(x^a,x^\alpha)\partial_a+X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümlü vektör alanı (Vishnevskii 2002) olmak üzere $\widetilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının yarı-tanjant demete dikey lifti,

$$ {}^{vv}\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\alpha} \end{pmatrix} $$

ile tanımlanır. Burada (3.50) matrisi yardımıyla, $({}^{vv}\widetilde{X}') = \bar{A}({}^{vv}\widetilde{X})$ olup elde edilen ${}^{vv}\widetilde{X}$ vektör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde $\widetilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının dikey lifti denir (Vishnevskii *et al*. 1985).

Teorem 3.5.2.1 $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i. ${}^{vv}X^{vv}f = 0$

ii. ${}^{vv}(X+Y) = {}^{vv}X + {}^{vv}Y$

iii. ${}^{vv}(fX) = {}^{vv}f\,{}^{vv}X$

eşitlikleri geçerlidir (Ay 2013).

İspat:

i. $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$ \begin{aligned} {}^{vv}X^{vv}f &= {}^{vv}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}f \\ &= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\partial_{a}{}^{vv}f + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}{}^{vv}f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}f}_{0} \\ &= 0 \end{aligned} $$

elde edilir.

ii $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}(X+Y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\alpha}+Y^{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y^{\alpha} \end{pmatrix} \\
&= {}^{vv}X + {}^{vv}Y
\end{aligned}
$$

elde edilir.

iii. $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}(fX) &= {}^{vv}(fX)^{I}\,\partial_I \\
&= \underbrace{{}^{vv}(fX)^{a}}_{0}\,\partial_a + \underbrace{{}^{vv}(fX)^{\alpha}}_{0}\,\partial_{\alpha} + {}^{vv}(fX)^{\bar{\alpha}}\,\partial_{\bar{\alpha}} \\
&= (fX)^{\alpha} \\
&= fX^{\alpha} \\
&= {}^{vv}f\,{}^{vv}X
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.5.3. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Dikey Lifti

ω, ω_{α} lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_{\alpha} dx^{\alpha}$ şeklinde olan B_m üzerindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun, indirgenmiş koordinatlara göre dikey lifti,

$$
{}^{vv}\omega = (0,\ \omega_{\alpha},\ 0) \tag{3.54}
$$

ile tanımlanır. Burada (3.50) eşitliğinden, $({}^{vv}\omega) = \overline{A}({}^{vv}\omega')$ olup elde edilen bu kovektör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde ω, 1-formunun dikey lifti denir ve ${}^{vv}\omega$ ile gösterilir (Vishnevskii *et al*. 1985).

Teorem 3.5.3.1 $f \in \Im_0^0(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

i. ${}^{vv}(\omega+\theta) = {}^{vv}\omega + {}^{vv}\theta$

ii. ${}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f\,{}^{vv}\omega$

iii. ${}^{vv}\omega({}^{vv}X) = 0$

eşitlikleri geçerlidir (Ay 2013).

İspat:

i. $f \in \Im_0^0(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^{vv}(\omega+\theta) &= (0, \omega_\alpha + \theta_\alpha, 0) \\ &= (0, \omega_\alpha, 0) + (0, \theta_\alpha, 0) \\ &= {}^{vv}\omega + {}^{vv}\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $f \in \Im_0^0(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}^{vv}(f\omega) &= {}^{vv}(f\omega)_I\, dx^I \\ &= \underbrace{{}^{vv}(f\omega)_a}_{0}\, dx^a + {}^{vv}(f\omega)_\alpha\, dx^\alpha + \underbrace{{}^{vv}(f\omega)_{\bar{\alpha}}}_{0}\, dx^{\bar{\alpha}} \\ &= (f\omega)_\alpha \\ &= f\omega_\alpha \\ &= {}^{vv}f\,{}^{vv}\omega \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $f \in \Im_0^0(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}\omega\left({}^{vv}X\right) &= {}^{vv}\omega_I\, {}^{vv}X^I \\
&= \underbrace{{}^{vv}\omega_a}_{0}\,\underbrace{{}^{vv}X^a}_{0} + {}^{vv}\omega_\alpha\,\underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0} + \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\alpha}}}_{0}\,{}^{vv}X^{\bar{\alpha}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.5.4. Yarı-Tanjant Demette Fonksiyonun Tam Lifti

$f = (x^a, x^\alpha)$, B_m üzerinde bir fonksiyon olmak üzere $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde f fonksiyonunun tam lifti,

$$
{}^{cc}f = \left(\iota\left(df\right)\right) = x^{\bar{\beta}}\partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f
$$

ile tanımlanır (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

3.5.5. Yarı-Tanjant Demette Vektör Alanının Tam Lifti

$\widetilde{X} \in \Im_0^1(M_n)$, $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ olmak üzere $\widetilde{X} = \widetilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümlü vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti (Vishnevskii 2002)

$$
{}^{cc}\widetilde{X} = \left({}^{cc}\widetilde{X}^\alpha\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} \tag{3.55}
$$

bileşenlerine sahiptir. Burada (3.50) eşitliğinden, $(^{cc}\widetilde{X}') = \bar{A}(^{cc}\widetilde{X})$ elde edilir (Vishnevskii *et al*. 1985).

Teorem 3.5.5.1 $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i. $^{vv}X^{cc}f = {}^{vv}(Xf)$

ii. $^{cc}X^{vv}f = {}^{vv}(Xf)$

iii. $^{cc}X^{cc}f = {}^{cc}(Xf)$

iv. $^{cc}(X+Y) = {}^{cc}X + {}^{cc}Y$

v. $^{cc}(fX) = {}^{cc}f\,{}^{vv}X + {}^{cc}X\,{}^{vv}f$

eşitlikleri yazılır (Ay 2013).

İspat:

i. $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}X^{cc}f &= {}^{vv}X^I \partial_I {}^{cc}f \\
&= \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0}\partial_a {}^{cc}f + \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0}\partial_\alpha {}^{cc}f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}} {}^{cc}f \\
&= X^\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(y^\sigma}_{\delta_\alpha^\sigma}\partial_\sigma f) \\
&= X^\alpha \partial_\alpha f \\
&= {}^{vv}(Xf)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii. $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$^{cc}X^{vv}f = {}^{cc}X^I \partial_I {}^{vv}f$$

$$
\begin{aligned}
&=^{cc} X^{a} \underbrace{\partial_{a}{}^{vv} f}_{0} +^{cc} X^{\alpha} \partial_{\alpha}{}^{vv} f +^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv} f}_{0} \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} f \\
&=^{vv} \left(Xf \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

iii. $f \in \mathfrak{I}_0^0\left(M_n\right)$ ve $X \in \mathfrak{I}_0^1\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}X^{cc} f &=^{cc} X^{I} \partial_{I}{}^{cc} f \\
&=^{cc} X^{a} \underbrace{\partial_{a}{}^{cc} f}_{0} +^{cc} X^{\alpha} \partial_{\alpha}{}^{cc} f +^{cc} X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}}{}^{cc} f \\
&= X^{\alpha} \partial_{\alpha} (y^{\sigma} \partial_{\sigma} f) + y^{s} \partial_{s} X^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}} \partial_{\sigma} f) \\
&= y^{\sigma} X^{\alpha} \partial_{\alpha} (\partial_{\sigma} f) + y^{s} \partial_{s} X^{\alpha} \partial_{\alpha} f \\
&= y^{\sigma} (X^{\alpha} \partial_{\alpha} (\partial_{\sigma} f) + (\partial_{\sigma} X^{\alpha}) \partial_{\alpha} f) \\
&= y^{\sigma} \partial_{\sigma} (X^{\alpha} \partial_{\alpha} f) \\
&= y^{\sigma} \partial_{\sigma} (Xf) \\
&=^{cc} \left(Xf \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

iv. $f \in \mathfrak{I}_0^0\left(M_n\right)$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\left(X+Y\right) &= \begin{pmatrix} X^{a} + Y^{a} \\ X^{\alpha} + Y^{\alpha} \\ y^{\sigma} \partial_{\sigma} \left(X^{\alpha} + Y^{\alpha} \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^{a} \\ X^{\alpha} \\ y^{\sigma} \partial_{\sigma} X^{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y^{a} \\ Y^{\alpha} \\ y^{\sigma} \partial_{\sigma} Y^{\alpha} \end{pmatrix} \\
&=^{cc} X +^{cc} Y
\end{aligned}
$$

elde edilir.

v. $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}^{cc}(fX) &= {}^{cc}(fX)^I \partial_I \\
&= {}^{cc}(fX)^a \partial_a + {}^{cc}(fX)^\alpha \partial_\alpha + {}^{cc}(fX)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \\
&= (fX)^a \partial_a + (fX)^\alpha \partial_\alpha + y^\sigma \partial_\sigma (fX)^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} \\
&= fX^a \partial_a + fX^\alpha \partial_\alpha + (y^\sigma \partial_\sigma f) X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} + y^\sigma f (\partial_\sigma X^\alpha) \partial_{\bar{\alpha}} \\
&= (y^\sigma \partial_\sigma f) X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} + f(X^a \partial_a + X^\alpha \partial_\alpha + y^\sigma \partial_\sigma X^\alpha \partial_{\bar{\alpha}}) \\
&= {}^{cc} f^{vv} X + {}^{cc} X^{vv} f
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.5.6. Yarı-Tanjant Demette Kovektör Alanının Tam Lifti

ω, koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ ile tanımlı B_m üzerinde 1-form olmak üzere ω 1-formunun tam lifti,

$$ {}^{cc}\omega = (0, y^\sigma \partial_\sigma \omega_\alpha, \omega_\alpha) \tag{3.56}$$

ile tanımlanır. Burada (3.50) eşitliğinden, $({}^{cc}\omega) = \bar{A}({}^{cc}\omega')$ olup elde edilen bu kovektör alanına $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinde ω 1-formunun tam lifti denir ve ${}^{cc}\omega$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.6.1 $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i. ${}^{vv}\omega^{cc}X = {}^{vv}(\omega(X))$

ii. ${}^{cc}\omega^{vv}X = {}^{vv}(\omega(X))$

iii. ${}^{cc}\omega^{cc}X = {}^{cc}(\omega(X))$

eşitlikleri geçerlidir (Ay 2013).

İspat:

i.

$$
\begin{aligned}
{}^{vv}\omega^{cc}X &= {}^{vv}\omega_I{}^{cc}X^I \\
&= \underbrace{{}^{vv}\omega_a}_{0}{}^{cc}X^a + {}^{vv}\omega_\alpha{}^{cc}X^\alpha + \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\alpha}}}_{0}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \\
&= \omega_\alpha X^\alpha \\
&= \omega(X) \\
&= {}^{vv}\omega(X)
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\omega^{vv}X &= {}^{cc}\omega_I{}^{vv}X^I \\
&= {}^{cc}\omega_a \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0} + {}^{cc}\omega_\alpha \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0} + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}{}^{vv}X^{\bar{\alpha}} \\
&= \omega_\alpha X^\alpha \\
&= \omega(X) \\
&= {}^{vv}\omega(X)
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\omega^{cc}X &= {}^{cc}\omega_I{}^{cc}X^I \\
&= \underbrace{{}^{cc}\omega_a}_{0}{}^{cc}X^a + {}^{cc}\omega_\alpha{}^{cc}X^\alpha + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}} \\
&= (y^\sigma\partial_\sigma\omega_\alpha)X^\alpha + \omega_\alpha(y^\sigma\partial_\sigma X^\alpha) \\
&= y^\sigma(\partial_\sigma\omega_\alpha)X^\alpha + y^\sigma\omega_\alpha(\partial_\sigma X^\alpha) \\
&= y^\sigma\partial_\sigma(\omega_\alpha X^\alpha)
\end{aligned}
$$

$$=^{cc}\left(\omega(X)\right)$$

Teorem 3.5.6.2 $\omega,\theta\in\Im_1^0\left(M_n\right)$ ve $f\in\Im_0^0\left(M_n\right)$ olmak üzere

i. $^{cc}\left(\omega+\theta\right)=^{cc}\omega+^{cc}\theta$

ii. $^{cc}\left(f\omega\right)=^{cc}f^{vv}\omega+^{vv}f^{cc}\omega$

eşitlikleri geçerlidir (Ay 2013).

İspat:

i. $\omega,\theta\in\Im_1^0\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}^{cc}\left(\omega+\theta\right)&=\left(0,y^{\sigma}\partial_{\sigma}(\omega_{\alpha}+\theta_{\alpha}),\omega_{\alpha}+\theta_{\alpha}\right)\\&=\left(0,y^{\sigma}\partial_{\sigma}\omega_{\alpha},\omega_{\alpha}\right)+\left(0,y^{\sigma}\partial_{\sigma}\theta_{\alpha},\theta_{\alpha}\right)\\&=^{cc}\omega+^{cc}\theta\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\omega\in\Im_1^0\left(M_n\right)$ ve $f\in\Im_0^0\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}^{cc}\left(f\omega\right)&=^{cc}\left(f\omega\right)_I dx^I\\&=\underbrace{^{cc}\left(f\omega\right)_a}_{0}dx^a+^{cc}\left(f\omega\right)_{\alpha}dx^{\alpha}+^{cc}\left(f\omega\right)_{\bar{\alpha}}dx^{\bar{\alpha}}\\&=y^{\sigma}\partial_{\sigma}\left(f\omega\right)_{\alpha}dx^{\alpha}+\left(f\omega\right)_{\alpha}dx^{\bar{\alpha}}\\&=\left(y^{\sigma}\partial_{\sigma}f\right)\omega_{\alpha}dx^{\alpha}+y^{\sigma}f\left(\partial_{\sigma}\omega_{\alpha}\right)dx^{\alpha}+f\omega_{\alpha}dx^{\bar{\alpha}}\\&=\left(y^{\sigma}\partial_{\sigma}f\right)\omega_{\alpha}dx^{\alpha}+f\left(y^{\sigma}\partial_{\sigma}\omega_{\alpha}dx^{\alpha}+\omega_{\alpha}dx^{\bar{\alpha}}\right)\\&=^{cc}f^{vv}\omega+^{vv}f^{cc}\omega\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.5.6.3 Keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i. $\left[{}^{vv}X, {}^{vv}Y \right] = 0$

ii. $\left[{}^{cc}X, {}^{vv}Y \right] = \left[{}^{vv}X, {}^{cc}Y \right] = {}^{vv}\left[X,Y \right]$

eşitlikleri geçerlidir (Ay 2013).

İspat: ${}^{vv}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\beta} \end{pmatrix}, {}^{vv}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y^{\beta} \end{pmatrix}$ ve $I = \left(a, \alpha, \overline{\alpha} \right)$ olmak üzere

i.

$$\left[{}^{vv}X, {}^{vv}Y \right]^{b} = {}^{vv}X^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}X^{b}}_{0}$$

$$= 0$$

$$\left[{}^{vv}X, {}^{vv}Y \right]^{\beta} = {}^{vv}X^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

$$\left[{}^{vv}X, {}^{vv}Y \right]^{\overline{\beta}} = {}^{vv}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}Y^{\overline{\beta}} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}{}^{vv}X^{\overline{\beta}}$$

$$= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\partial_{a}Y^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}Y^{\beta} + {}^{vv}X^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}Y^{\beta}}_{0}$$

$$- \underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0}\partial_{a}X^{\beta} - \underbrace{{}^{vv}Y^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}X^{\beta} - {}^{vv}Y^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

olup buradan

$$\left[{}^{vv}X, {}^{vv}Y \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

ii.

$$\left[{}^{cc}X,{}^{vv}Y\right]^{b} = {}^{cc}X^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}Y^{b}}_{0} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}{}^{cc}X^{b}$$

$$= -\underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0}\partial_{a}X^{b} - \underbrace{{}^{vv}Y^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}X^{b} - {}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}X^{b}}_{0}$$

$$= 0$$

$$\left[{}^{cc}X,{}^{vv}Y\right]^{\beta} = {}^{cc}X^{I}\partial_{I}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}{}^{cc}X^{\beta}$$

$$= -\underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0}\partial_{a}X^{\beta} - \underbrace{{}^{vv}Y^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}X^{\beta} - {}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

$$\left[{}^{cc}X,{}^{vv}Y\right]^{\bar{\beta}} = {}^{cc}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} - {}^{vv}Y^{I}\partial_{I}{}^{cc}X^{\bar{\beta}}$$

$$= {}^{cc}X^{a}\underbrace{\partial_{a}Y^{\beta}}_{0} + {}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta} + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{\beta}}_{0}$$

$$-\underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0}\partial_{a}(y^{\sigma}\partial_{\sigma}X^{\beta}) - \underbrace{{}^{vv}Y^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}(y^{\sigma}\partial_{\sigma}X^{\beta}) - {}^{vv}Y^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}}\partial_{\sigma}X^{\beta})$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}$$

$$= \left[X,Y\right]^{\beta}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\left[{}^{cc}X,{}^{vv}Y\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[X,Y\right]^{\beta} \end{pmatrix} = {}^{vv}\left[X,Y\right]$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Tanjant Demetin Pull-Back Demeti

Bu bölümde yarı-tanjant ve pull-back demeti tanımlanarak, yarı-tanjant demetin bir pull-back demeti olduğu belirtilmiştir. Ayrıca, güzel kare dönüşümünün tanımı yapılarak, yarı-tanjant demetin güzel kare dönüşümüne somut bir örnek olduğu gösterilmektedir.

$T_x(B_m)\left(x=\pi_1\left(\tilde{x}\right),\tilde{x}=\left(x^a,x^\alpha\right)\in M_n\right)$, x noktasındaki tanjant uzayı ve $T\left(B_m\right)$ tanjant demetinin fibre koordinatları $x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha$ olmak üzere $\left(\bar{\alpha},\bar{\beta},...=n+1,...,2n\right)$ kabul edilir. M_n manifoldunda $(x^I)=(x^a,x^\alpha,x^{\bar{\alpha}})$, $(x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha,\ \bar{\alpha}=\alpha+m,\ I=1,...,n+m)$ şeklinde lokal koordinatlara sahip $t\left(B_m\right)$ yarı-tanjant demeti elde edilir.

$t\left(B_m\right)$ yarı-tanjant demeti, B_m üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi:(x^a,x^\alpha,x^{\bar{\alpha}})\to(x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi:\mathrm{t}\left(B_m\right)\to B_m$ izdüşüm dönüşümüne sahiptir. Eğer $\pi_2:(x^a,x^\alpha,x^{\bar{\alpha}})\to(x^a,x^\alpha)$ ile, $\pi_2:t\left(B_m\right)\to M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa; $t\left(B_m\right)$, M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur. Buradaki izdüşüm dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

Ayrıca $\left(t\left(B_m\right),\pi_1\circ\pi_2\right)$ yarı-tanjant demeti karma demet (Poor 1981) ya da step-like demeti belirtir (Ostianu 1974).

$f{:}B'\to B$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\pi{:}E\to B$ fibre demeti olsun. İndirgenmiş demet veya Whitney çarpımı olarak da bilinen pull-back demeti

$$f^*E=\left\{(b',e)\in B'\times E\,\middle|\,f(b')=\pi(e)\right\}\subset B'\times E$$

total uzayı ile verilir (Steenrod 1951; Lawson and Michelsohn 1989; Husemoller 1994). Pull-back demetinde $\pi': f^{*}E \to B'$ izdüşümü ilk değişken olan (b', e) üzerine izdüşüm şeklindedir, yani $\pi'(b', e) = b'$ eşitliği bulunur. Pull-back demet veya Whitney çarpımının daha yüksek mertebeden durumlara genellemeleri "Pontryagin demetleri" olarak bilinir (Pontryagin 1962). Pull-back demetin ve $(t(B_m), \pi_2)$ yarı-tanjant demetin yukarıda yer alan tanımlarından; yarı-tanjant demetin, B_m manifoldu üzerinde tanımlı tanjant demetin π_1 izdüşüm dönüşümü yardımıyla oluşturulmuş bir pull-back demeti olduğu sonucuna varılır (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

Eğer,

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\gamma}{\to} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ C & \underset{\pi}{\to} & D \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir diagram aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu dönüşüm güzel kare (good square) belirtir:

i. α ve β fibre demetlerdir (vektör demetleri olması gerekmez),

ii. γ ve π vektör demetleridir,

iii. Dönüşümler arasında $\pi \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ eşitliği geçerlidir,

iv. Lokal koordinatlarla ifadesi ise

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\gamma}{\to} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ C & \underset{\pi}{\to} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U^n \times R^r \times G^s \times R^t & \to & U^n \times G^s \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^n \times R^r & \to & U^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x^i, a^a, g^\lambda, b^\sigma) & \to & (x^i, g^\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x^i, a^a) & \to & (x^i) \end{array}$$

şeklindedir. Burada G bir manifold belirtmektedir (Etayo 1991).

Yukarıdaki tanımdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1.1. $\pi : t(B_m) \to B_m$ yarı-tanjant demet ve $\pi_1 : M_n \to B_m$ keyfi bir fibre demet olmak üzere aşağıdaki diagram güzel kare belirtir:

$$\begin{array}{ccc} t(B_m) & \overset{\pi_2}{\to} & M_n \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ t(B_m) & \underset{\pi}{\to} & B_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M_n \times T_x(B_m) & \overset{\pi_2}{\to} & M_n \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ M_n \times T_x(B_m) & \underset{\pi}{\to} & B_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) & \overset{\pi_2}{\to} & \left(x^a, x^\alpha\right) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ (x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) & \underset{\pi}{\to} & \left(x^\alpha\right) \end{array}$$

Yarı-tanjant demetlerde lineer konneksiyonlar ve onların bazı özellikleri (Eğrilik, burulma tensörleri ile lie türevleri) Vishnevskii (2002) ve Vishnevskii *et al*. (1985) de çalışılmıştır. Bu çalışmada ise, (Vishnevskii 2002) tarafından daha önce başlatılan B_m baz manifoldundan $\left(t(B_m), \pi_2\right)$ yarı-tanjant (pull-back) demetine izdüşümlü lineer konneksiyonun tam liftleri araştırılacaktır.

4.2. İzdüşümlü Lineer Konneksiyonun Tam Liftleri

Bu bölümde daha önce Vishnevskii tarafından başlatılan yarı-tanjant (pull-back) demete izdüşümlü lineer konneksiyonların tam liftleri ile ilgili katsayılar hesaplanarak, çeşitli lift problemleri ele alınmaktadır.

f, B_m üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerinde, f fonksiyonunun dikey lifti, ${}^{v}f = f \circ \pi_1$ ve $\pi : t(B_m) \to B_m$ dönüşümleri kullanılarak

$${}^{vv}f = {}^{v}f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$${}^{vv}f(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) = f(x^\alpha) \tag{4.1}$$

bulunur. Böylece ${}^{vv}f$ dikey liftinin $\pi : t(B_m) \to B_m$ izdüşümünün her bir fibresi boyunca sabit olduğu söylenebilir (Ay 2013).

M_n manifoldunda tanımlı $f = f(x^a, x^\alpha)$ fonksiyonunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine ${}^{cc}f$ tam lifti,

$$ {}^{cc}f = \iota(df) = x^{\bar{\beta}}\partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır (Salimov and Kadıoğlu 2000).

$X = X^\alpha \partial_\alpha$ bileşenleri ile verilen $X \in \Im_0^1(B_m)$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti,

$$ {}^{vv}X = \left({}^{vv}X^\alpha\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada (3.50) ve (4.3) eşitliklerinden ${}^{vv}X' = \bar{A}({}^{vv}X)$ elde edilir (Ay 2013).

Keyfi $F \in \Im_1^1(B_m)$ afinoru için (3.50) matrisinden $\gamma F' = \bar{A}(\gamma F)$ eşitliği sağlanır. Burada γF, indirgenmiş koordinat sisteminde

$$ \gamma F = \left(\gamma F\right)^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup bir vektör alanı belirtir.

$\widetilde{X} = \widetilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ ile tanımlı bir $\widetilde{X} \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ izdüşümlü vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti,

$$ {}^{cc}\widetilde{X} = \left({}^{cc}\widetilde{X}^{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^{a} \\ X^{\alpha} \\ y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.5} $$

bileşenlerine sahip vektör alanı belirtir (Vishnevskii 2002). Burada $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_{\alpha}$ şeklinde tanımlı bir vektör alanıdır. (3.50) ve (4.5) eşitliklerinden $({}^{cc}\widetilde{X}') = \overline{A}({}^{cc}\widetilde{X})$ elde edilir (Vishnevskii 2002; Vishnevskii *et al*. 1985).

Teorem 4.2.1: $X \in \Im_1^o(B_m)$ ve $Y \in \Im_1^0(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları olsun. Lie parantezi için

$$ [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}] = {}^{cc}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \ , \ (L_{{}^{cc}\widetilde{X}}\, {}^{cc}\widetilde{Y} = {}^{cc}\left(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)) $$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Keyfi $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için $\begin{pmatrix} [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{b} \\ [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{\beta} \\ [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette tanımlı $[{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{J}$ nin bileşenleri olmak üzere $(x^{b}, x^{\beta}, x^{\overline{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$ [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{J} = ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{Y})^{J} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{J} $$

eşitliği yazılabilir. Burada (4.5) kullanılarak, $J = b$ için

$$ \begin{aligned} [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}]^{b} &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{Y})^{b} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{b} \\ &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{Y})^{b}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{Y})^{b} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{Y})^{b}}_{0} \\ &\quad -({}^{cc}\widetilde{Y})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{X})^{b}}_{0} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{b} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{X})^{b}}_{0} \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}Y)^{b} - ({}^{cc}Y)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{b} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\widetilde{Y}^{b} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\widetilde{X}^{b} \\
&= \widetilde{[X,Y]}^{b}
\end{aligned}
$$

olur. $J=\beta$ için, (4.5)'den

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}\widetilde{X},{}^{cc}\widetilde{Y}]^{\beta} &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\beta} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} \\
&= ({}^{cc}\widetilde{X})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\beta}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\beta} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\beta}}_{0} \\
&\quad -({}^{cc}\widetilde{Y})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta}}_{0} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta}}_{0} \\
&= ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\beta} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta} \\
&= [X,Y]^{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak $J=\bar{\beta}$ için, (4.5)'den

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}\widetilde{X},{}^{cc}\widetilde{Y}]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}\widetilde{X})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\beta}}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\beta}} \\
&\quad -({}^{cc}\widetilde{Y})^{a}\underbrace{\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}}}_{0} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} - ({}^{cc}\widetilde{Y})^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}Y^{\beta}) + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}}\partial_{\sigma}Y^{\beta} \\
&\quad -Y^{\alpha}\partial_{\alpha}(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta}) - y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}Y^{\alpha}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}}\partial_{\sigma}X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\varepsilon}Y^{\beta} + y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}X^{\sigma}\right)\left(\partial_{\sigma}Y^{\beta}\right) \\
&\quad -y^{\varepsilon}Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} - y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}Y^{\sigma}\right)\left(\partial_{\sigma}X^{\beta}\right) \\
&= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}[X,Y]^{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ${}^{cc}\widetilde{[X,Y]}$ nin $t(B_m)$ deki $(x^{b},x^{\beta},x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$^{cc}\widetilde{[X,Y]}=\begin{pmatrix}\widetilde{[X,Y]}^{b}\\ [X,Y]^{\beta}\\ y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}[X,Y]^{\beta}\end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[^{cc}\widetilde{X},^{cc}\widetilde{Y}]=^{cc}[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.2: $\widetilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ve keyfi $F\in\Im_1^1(B_m)$ için

$$[^{cc}\widetilde{X},\gamma F]=\gamma\left(L_X F\right)$$

eşitliği geçerlidir. Burada L_X, X e göre Lie türev operatörüdür.

İspat: Keyfi $\widetilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ve $F\in\Im_1^1(B_m)$ için $(x^b,x^\beta,x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ üzerinde tanımlı $[^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^J$ in bileşenleri $\begin{pmatrix}[^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^b\\ [^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^\beta\\ [^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^{\bar\beta}\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$[^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^J=(^{cc}\widetilde{X})^I\partial_I(\gamma F)^J-(\gamma F)^I\partial_I(^{cc}\widetilde{X})^J$$

eşitliği yazılır. Burada (4.4) ve (4.5) kullanılarak, $J=b$ için

$$\begin{aligned}[^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^b&=(^{cc}\widetilde{X})^I\partial_I(\gamma F)^b-(\gamma F)^I\partial_I(^{cc}\widetilde{X})^b\\&=(^{cc}\widetilde{X})^a\partial_a\underbrace{(\gamma F)^b}_{0}+(^{cc}\widetilde{X})^\alpha\partial_\alpha\underbrace{(\gamma F)^b}_{0}+(^{cc}\widetilde{X})^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underbrace{(\gamma F)^b}_{0}\\&\quad-\underbrace{(\gamma F)^a}_{0}\partial_a(^{cc}\widetilde{X})^b-\underbrace{(\gamma F)^\alpha}_{0}\partial_\alpha(^{cc}\widetilde{X})^b-(\gamma F)^{\bar\alpha}\underbrace{\partial_{\bar\alpha}(^{cc}\widetilde{X})^b}_{0}\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. $J=\beta$ için, (4.4) ve (4.5) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^{\beta} &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\beta} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} \\
&= ({}^{cc}\widetilde{X})^{a}\partial_{a}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} \\
&\quad - \underbrace{(\gamma F)^{a}}_{0}\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta} - (\gamma F)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}\widetilde{X})^{\beta}}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak, $J=\bar{\beta}$ için (4.4) ve (4.5) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}\widetilde{X},\gamma F]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}\widetilde{X})^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\bar{\beta}} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}\widetilde{X})^{a}\underbrace{\partial_{a}(\gamma F)^{\bar{\beta}}}_{0} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{\bar{\beta}} + ({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}}F_{\varepsilon}^{\beta} \\
&\quad - \underbrace{(\gamma F)^{a}}_{0}\partial_{a}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}} - \underbrace{(\gamma F)^{\bar{\alpha}}}_{y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{({}^{cc}\widetilde{X})^{\bar{\beta}}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta}} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\beta} + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}F_{\alpha}^{\beta} - y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\beta} + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}F_{\alpha}^{\beta} - y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon}\left(X^{\alpha}\partial_{\alpha}F_{\varepsilon}^{\beta} - \partial_{\alpha}X^{\beta}F_{\varepsilon}^{\alpha} + \partial_{\varepsilon}X^{\alpha}F_{\alpha}^{\beta}\right) \\
&= y^{\varepsilon}\left(L_{X}F\right)_{\varepsilon}^{\beta}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\gamma\left(L_{X}F\right)$ nin $t(B_m)$ deki $(x^{b},x^{\beta},x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$
\gamma\left(L_{X}F\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^{\varepsilon}\left(L_{X}F\right)_{\varepsilon}^{\beta} \end{pmatrix}
$$

şeklinde olup $[{}^{cc}\widetilde{X},\gamma F]=\gamma\left(L_{X}F\right)$ eşitliği gösterilmiş olur.

$p:Y\to M$ fibreli manifold olmak üzere eğer M üzerindeki klasik lineer konneksiyon $\underline{\nabla}$ ye $p-$ilişkili olan Y üzerinde tanımlı ∇ klasik konneksiyonu varsa, ∇ konneksiyonuna p ye göre izdüşümlü konneksiyon denir (Wlodzimierz and Tomáš

2009; Bednarska 2013). B_m baz manifoldu üzerinde tanımlı $\mathrm{T}(B_m)$ tanjant demetinde, $\underline{\nabla}$ konneksiyonu B_m üzerindeki klasik lineer konneksiyonu tanımlar (Mikulski 2007).

$\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Im_0^1(M_n)$ ve $X,Y\in\Im_0^1(B_m)$ vektör alanları için $Tp\circ\widetilde{X}=X\circ p$ ve $Tp\circ\widetilde{Y}=Y\circ p$ olmak üzere

$$Tp\circ\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}=\left(\underline{\nabla}_X Y\right)\circ p$$

eşitliği bulunmaktadır. Keyfi $X,Y\in\Im_0^1(B_m)$ için

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right]$$

olmaktadır. Yukarıdaki tanımdan ∇, ($p:=\pi_1:M_n\to B_m$) B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon belirtir.

$t(B_m)$ yarı-tanjant demette keyfi $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$$^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\widetilde{Y}={}^{cc}\left(\underline{\nabla}_X Y\right) \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlayan $^{cc}\nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonu bulunabilir (Vishnevskii 2002; Vishnevskii *et al.* 1985). Burada (3.50) eşitliğini sağlayan konneksiyon katsayıları lokal koordinatlar yardımıyla hesaplanabilir. $\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}$lar B_m baz manifoldundaki (x^α) lokal koordinatlarına göre $\underline{\nabla}$ konneksiyonun katsayılarını ve $^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ J}$ lar ise $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^a,x^\alpha,x^{\bar{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre $^{cc}\nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonun katsayılarını belirtmektedir.

M_n üzerindeki (x^a, x^α) lokal koordinatlarına göre, sırasıyla, $\widetilde{X}^I$ ve $\widetilde{Y}^J$ bileşenlerine sahip $\widetilde{X} \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\widetilde{Y} \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanlarının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine ${}^{cc}\widetilde{X}$ ve ${}^{cc}\widetilde{Y}$ tam liftleri $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{\propto}\widetilde{X}: \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, \quad {}^{\propto}\widetilde{Y}: \begin{pmatrix} \widetilde{Y}^a \\ Y^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon Y^\alpha \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahiptir. $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{cc}\widetilde{X}^I \nabla_I {}^{cc}\widetilde{Y}^J = X^I \underline{\nabla}_I Y^J$ eşitliği

$$ \begin{pmatrix} {}^{\propto}\widetilde{X}^{I\propto} \nabla_I {}^{\propto}\widetilde{Y}^b \\ {}^{\propto}\widetilde{X}^{I\propto} \nabla_I {}^{\propto}\widetilde{Y}^\beta \\ {}^{\propto}\widetilde{X}^{I\propto} \nabla_I {}^{\propto}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^a \underline{\nabla}_a Y^b \\ X^\alpha \underline{\nabla}_\alpha Y^\beta \\ y^\sigma \partial_\sigma (X^\alpha \underline{\nabla}_\alpha Y^\beta) \end{pmatrix} $$

bileşenleri ile ifade edilir. Burada (3.50) eşitliğini sağlayan konneksiyon katsayıları

$$ \begin{cases} {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ b} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ b} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ b} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ b}, \\ {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \beta} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \beta} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \\ {}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ \bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \bar{\beta}} = {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}} = 0, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \\ {}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \bar{\beta}} = y^\varepsilon \partial_\varepsilon \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}, \\ {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \bar{\beta}} = \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}. \end{cases} \tag{4.7} $$

şeklindedir. (3.50), (3.52) ve (4.7) kullanılarak

$$ {}^{cc}\Gamma_{I'\ K'}^{\ J'} = A_J^{J'} A_{I'}^I A_{K'}^K \, {}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ J} + A_J^{J'} A_{L'}^J \, {}^{cc}\Gamma_{I'\ K'}^{\ L'} $$

konneksiyon dönüşüm kuralının sağlandığı görülür. Burada $I=(a,\alpha,\overline{\alpha})$, $J=(b,\beta,\overline{\beta})$, $K=(c,\gamma,\overline{\gamma})$, $L=(d,\varphi,\overline{\varphi})$ ile tanımlıdır (Vishnevskii 2002)

İspat: (3.50) ve (3.52) eşitlikleri dikkate alınarak ${}^{cc}\Gamma_{\alpha'}{}^{\overline{\beta}'}{}_{\gamma'}$ bileşeni

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\Gamma_{\alpha'}{}^{\overline{\beta}'}{}_{\gamma'} &= A^{\overline{\beta}'}_{\overline{\beta}} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\gamma}_{\gamma'} \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha}{}^{\overline{\beta}}{}_{\gamma}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}} + A^{\overline{\beta}'}_{\beta} \underbrace{A^{\overline{\beta}}_{\phi'}}_{0} {}^{cc}\Gamma_{\alpha'}{}^{\phi'}{}_{\gamma'} + A^{\overline{\beta}'}_{\overline{\beta}} A^{\overline{\beta}}_{\varphi'} {}^{cc}\Gamma_{\alpha'}{}^{\varphi'}{}_{\gamma'} + A^{\overline{\beta}'}_{\beta} A^{\overline{\beta}}_{\varphi'} \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha'}{}^{\overline{\varphi}'}{}_{\gamma'}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha'}{}^{\varphi'}{}_{\gamma'}} \\
&= A^{\overline{\beta}'}_{\beta} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\gamma}_{\gamma'} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} + \underbrace{A^{\overline{\beta}'}_{\beta} A^{\beta}_{\varphi'\varepsilon} y^{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\varphi}{}_{\gamma}}_{-y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}A^{\beta'}_{\beta}A^{\beta}_{\varphi'}\Gamma_{\alpha}{}^{\varphi'}{}_{\gamma'}} + \underbrace{A^{\overline{\beta}'}_{\beta} A^{\overline{\beta}}_{\varphi'} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha'}{}^{\varphi'}{}_{\gamma'}}_{A^{\beta'}_{\beta}A^{\beta}_{\varphi'}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\varphi'}{}_{\gamma'}} \\
&= A^{\overline{\beta}'}_{\beta} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\gamma}_{\gamma'} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} - y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'} + y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'} \\
&= y^{\varepsilon'}\partial_{\varepsilon'}\Gamma_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'}
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Buradan ${}^{cc}\Gamma_{\alpha}{}^{\overline{\beta}}{}_{\gamma} = y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ bulunur. ${}^{cc}\Gamma_{I'}{}^{J'}{}_{K'}$ katsayılarının diğer bileşenleri de benzer yolla bulunabilir.

(3.50) ve (3.52) eşitlikleri yardımıyla (4.7)'deki $\Gamma_{I}{}^{J}{}_{K}$ bileşenleri yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonu tanımlar. Bu izdüşümlü lineer konneksiyon, ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonun $t(B_m)$ yarı-tanjant demete tam lifti olup ${}^{cc}\nabla$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.3. Eğer T ve R, sırasıyla, ∇ nın burulma ve eğrilik tensörleri ise, ${}^{cc}T$ ve ${}^{cc}R$ de, sırasıyla, ${}^{cc}\nabla$ nin burulma ve eğrilik tensörleridir.

İspat : Keyfi $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\in\Im^1_0(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için, (4.6) ve Teorem 4.2.1. kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}T\left({}^{cc}\widetilde{X},{}^{cc}\widetilde{Y}\right) &= {}^{cc}\left(T\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)\right) \\
&= {}^{cc}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}-\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}-\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$= {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\widetilde{Y} - {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}\,{}^{cc}\widetilde{X} - \left[{}^{cc}\widetilde{X},\,{}^{cc}\widetilde{Y}\right]$$

$${}^{cc}R\left({}^{cc}\widetilde{X},\,{}^{cc}\widetilde{Y}\right){}^{cc}\widetilde{Z} = {}^{cc}\left(R\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right)\widetilde{Z}\right)$$

$$= {}^{cc}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z}\right)$$

$$= {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}\,{}^{cc}\widetilde{Z} - {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}\,{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\widetilde{Z} - {}^{cc}\nabla_{\left[{}^{cc}\widetilde{X},\,{}^{cc}\widetilde{Y}\right]}\,{}^{cc}\widetilde{Z}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Teorem 4.2.3 ispatlanmış olur.

T burulma tensörünün lokal koordinatları $T_{\alpha\gamma}{}^{\beta}$ ve R eğrilik tensörünün lokal koordinatları $R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta}$ olmak üzere

$$T_{\alpha\gamma}{}^{\beta} = \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} - \Gamma_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\alpha}$$

$$R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\varphi} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\varphi} + \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\phi}\Gamma_{\gamma}{}^{\phi}{}_{\varphi} - \Gamma_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\phi}\Gamma_{\alpha}{}^{\phi}{}_{\varphi}$$

eşitlikleri bulunmaktadır. Bu eşitlikler yardımıyla $t(B_m)$ yarı-tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{cc}\nabla$ nın ${}^{cc}T$ burulma tensörünün $\widetilde{T}_{IK}{}^{J}$ bileşenleri,

$$\begin{cases} \widetilde{T}_{\alpha\gamma}{}^{b} &= T_{\alpha\gamma}{}^{b} \\ \widetilde{T}_{\alpha\gamma}{}^{\beta} &= T_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \\ \widetilde{T}_{\alpha\overline{\gamma}}{}^{\overline{\beta}} &= T_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \\ \widetilde{T}_{\alpha\gamma}{}^{\overline{\beta}} &= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}T_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \\ \widetilde{T}_{\overline{\alpha}\gamma}{}^{\overline{\beta}} &= T_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \end{cases} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlı olup diğer tüm bileşenler sıfıra eşitttir.

Aynı şekilde ${}^{cc}\nabla$ nın ${}^{cc}R$ eğrilik tensörünün $\widetilde{R}_{IKL}{}^{J}$ bileşenleri,

$$\begin{cases} \widetilde{R}_{\alpha\gamma\varphi}{}^{b} = R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{b} \\ \widetilde{R}_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} = R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} \\ \widetilde{R}_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\overline{\beta}} = y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} \\ \widetilde{R}_{\alpha\overline{\gamma}\varphi}{}^{\overline{\beta}} = R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} \\ \widetilde{R}_{\alpha\gamma\overline{\varphi}}{}^{\overline{\beta}} = R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} \\ \widetilde{R}_{\overline{\alpha}\gamma\varphi}{}^{\overline{\beta}} = R_{\alpha\gamma\varphi}{}^{\beta} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup diğer bileşenler sıfır olur. Burada $I=(a,\alpha,\overline{\alpha})$, $J=(b,\beta,\overline{\beta})$, $K=(c,\gamma,\overline{\gamma})$ ve $L=(d,\varphi,\overline{\varphi})$ olarak tanımlıdır.

4.3. Vektör Alanlarının Yatay Liftleri

Bu bölümde yarı-tanjant demette izdüşümlü lineer konneksiyonlar ile ilgili çeşitli lift problemleri ve yarı-tanjant demette infinitesimal lineer dönüşümler incelenmektedir.

$F\in\Im_1^1(B_m)$ afinoru için (3.50) kullanılarak $(\gamma F)'=\overline{A}(\gamma F)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. $(x^a,x^\alpha,x^{\overline{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre γF,

$$\gamma F=(\gamma F^I)=\begin{pmatrix}0\\0\\y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

$\widetilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$, M_n üzerindeki izdüşümlü bir vektör alanı olsun. $\widetilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının ${}^{HH}\widetilde{X}$ yatay lifti $t(M_n)$ üzerinde

$${}^{HH}\widetilde{X}={}^{cc}\widetilde{X}-\gamma(\nabla\widetilde{X}) \tag{4.10}$$

ile tanımlıdır. Burada ∇, B_m diferansiyellenebilir manifoldunda izdüşümlü simetrik lineer konneksiyondur. ${}^{cc}\widetilde{X}$ ve $\gamma(\nabla\widetilde{X})$ vektör alanlarının, $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ lokal koordinatlarına göre bileşenleri, sırasıyla,

$$ {}^{cc}\widetilde{X} = \left({}^{cc}\widetilde{X}^I\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}, \quad \gamma(\nabla\widetilde{X}) = \left(\gamma(\nabla\widetilde{X})^I\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} $$

şeklindedir. Burada $\nabla_\alpha X^\varepsilon$, X^ε nin kovaryant türevi olup

$$ (\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha $$

şeklinde tanımlıdır. Böylece $\widetilde{X}$ izdüşümlü vektör alanının ${}^{HH}\widetilde{X}$ yatay lifti $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ lokal koordinatlarına göre

$$ {}^{HH}X = \left({}^{HH}X^I\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma^\alpha{}_\beta X^\beta \end{pmatrix} \tag{4.11} $$

bileşenlerine sahiptir. Burada $\Gamma^\alpha{}_\beta = y^\varepsilon \Gamma_\varepsilon{}^\alpha{}_\beta$ ile tanımlıdır.

Teorem 4.3.1.: $X \in \Im_0^1(B_m)$ ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ için

i. ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{vv} f = 0$,

ii. ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{cc} f = {}^{vv}\left(\nabla_X f\right)$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: i. $X \in \Im_0^1(B_m)$ ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ için (4.1) ve (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{vv}f &= {}^{vv}X^I\,{}^{cc}\nabla_I{}^{vv}f \\
&= {}^{vv}X^a\,{}^{cc}\nabla_a{}^{vv}f + {}^{vv}X^\alpha\,{}^{cc}\nabla_\alpha{}^{vv}f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{vv}f \\
&= \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0}\partial_a f + \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0}\partial_\alpha f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} f}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $X \in \Im_0^1(B_m)$ ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ için (4.2) ve (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{cc}f &= {}^{vv}X\left({}^{cc}f\right) \\
&= {}^{vv}X^I\partial_I\,{}^{cc}f \\
&= {}^{vv}X^a\partial_a\,{}^{cc}f + {}^{vv}X^\alpha\partial_\alpha\,{}^{cc}f + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}f \\
&= \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0}\partial_a\,{}^{cc}f + \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0}\partial_\alpha\,{}^{cc}f + \underbrace{{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}}_{X^\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}f \\
&= X^\alpha\partial_{\bar{\alpha}}y^\beta\partial_\beta f = X^\alpha\delta_\alpha^\beta\partial_\beta f = X^\alpha\partial_\alpha f \\
&= {}^{vv}\left(Xf\right) \\
&= {}^{vv}\left(\nabla_X f\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.2: $\widetilde{X}$, M_n manifoldu üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ olmak üzere

i. ${}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}{}^{vv}f = {}^{vv}\left(\nabla_{\widetilde{X}}f\right)$,

ii. ${}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}{}^{cc}f = {}^{cc}\left(\nabla_{\widetilde{X}}f\right)$

eşitlikleri elde edilir.

İspat: i. $f \in \Im_0^0(B_m)$ ve $\widetilde{X}$, $X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olmak üzere (4.1) ve (4.5) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{vv}f &= {}^{cc}\widetilde{X}\left({}^{vv}f\right) = {}^{cc}\widetilde{X}^{I}\partial_{I}\,{}^{vv}f \\
&= {}^{cc}\widetilde{X}^{a}\partial_{a}\,{}^{vv}f + {}^{cc}\widetilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha}\,{}^{vv}f + {}^{cc}\widetilde{X}^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\,{}^{vv}f \\
&= \widetilde{X}^{a}\underbrace{\partial_{a}f}_{0} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}f + y^{\sigma}\partial_{\sigma}X^{\alpha}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}f}_{0} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}f \\
&= {}^{vv}\left(\widetilde{X}f\right) \\
&= {}^{vv}\left(\nabla_{\widetilde{X}}f\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii. $f \in \Im_0^0(B_m)$ ve $\widetilde{X}$, $X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olmak üzere (4.2) ve (4.5) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}f &= {}^{cc}\widetilde{X}\left({}^{cc}f\right) = {}^{cc}\widetilde{X}^{I}\partial_{I}\,{}^{cc}f \\
&= {}^{cc}\widetilde{X}^{a}\partial_{a}\,{}^{cc}f + {}^{cc}\widetilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha}\,{}^{cc}f + {}^{cc}\widetilde{X}^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}f \\
&= \widetilde{X}^{a}\partial_{a}\left(y^{\beta}\partial_{\beta}f\right) + X^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(y^{\beta}\partial_{\beta}f\right) + y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\left(y^{\sigma}\partial_{\sigma}f\right) \\
&= \widetilde{X}^{a}\partial_{a}y^{\beta}\partial_{\beta}f + X^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(y^{\beta}\partial_{\beta}f\right) + y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\left(y^{\sigma}\partial_{\sigma}f\right) \\
&= y^{\beta}(\widetilde{X}^{a}\partial_{a} + X^{\alpha}\partial_{\alpha})\partial_{\beta}f + y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\sigma}\partial_{\sigma}f \\
&= y^{\beta}\partial_{\beta}(\widetilde{X}^{a}\partial_{a} + X^{\alpha}\partial_{\alpha})f + \left(y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\partial_{\alpha}f \\
&= y^{\beta}\partial_{\beta}(\widetilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha}f) \\
&= {}^{cc}\left(\widetilde{X}f\right) \\
&= {}^{cc}\left(\nabla_{\widetilde{X}}f\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3: $X,Y \in \Im_0^1(B_m)$ için

$$ {}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{vv}Y = 0 $$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $X,Y \in \Im_0^1(B_m)$ için (4.3) ve (4.7) kullanılarak

$$ {}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{vv}Y = \begin{pmatrix} {}^{vv}X^I\,{}^{cc}\nabla_I\,{}^{vv}Y^b \\ {}^{vv}X^I\,{}^{cc}\nabla_I\,{}^{vv}Y^\beta \\ {}^{vv}X^I\,{}^{cc}\nabla_I\,{}^{vv}Y^{\bar\beta} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0}\,{}^{cc}\nabla_a\,{}^{vv}Y^{\bar\beta} + \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0}\,{}^{cc}\nabla_\alpha\,{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{vv}X^{\bar\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\bar\alpha}\,{}^{vv}Y^{\bar\beta} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha(\partial_{\bar\alpha}\,{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta}{}_K\,{}^{vv}Y^K) \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha(\underbrace{\partial_{\bar\alpha}Y^\beta}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta}{}_c\,\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta}{}_\gamma\,\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta}{}_{\bar\gamma}}_{0}\,{}^{vv}Y^{\bar\gamma}) \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} $$

şeklindeki bileşenlere sahip, ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{vv}Y = 0$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3.4: $\widetilde{X}$, $X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanı olsun. $Y \in \Im_0^1(B_m)$ olmak üzere

$$ {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}{}^{vv}Y = {}^{vv}\left(\nabla_X Y\right) $$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\widetilde{X}$, M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı ve $Y \in \Im_0^1(B_m)$ olmak üzere (4.3), (4.5) ve (4.7)'den

$$ {}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}{}^{vv}Y = \begin{pmatrix} {}^{cc}X^{I\,cc}\nabla_I{}^{vv}Y^b \\ {}^{cc}X^{I\,cc}\nabla_I{}^{vv}Y^\beta \\ {}^{cc}X^{I\,cc}\nabla_I{}^{vv}Y^{\bar\beta} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^{cc}X^{a\,cc}\nabla_a{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{cc}X^{\alpha\,cc}\nabla_\alpha{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{cc}X^{\bar\alpha\,cc}\nabla_{\bar\alpha}{}^{vv}Y^{\bar\beta} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{pmatrix} X^a(\partial_a{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + X^\alpha(\partial_\alpha{}^{vv}Y^{\bar\beta} \\ + {}^{cc}\Gamma_\alpha{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + \left(y^\varepsilon\partial_\varepsilon X^\alpha\right)(\partial_{\bar\alpha}{}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) \end{pmatrix} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{pmatrix} X^a(\underbrace{\partial_a Y^\beta}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_c}_{0}{}^{vv}Y^c + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_\gamma}_{0}{}^{vv}Y^\gamma + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_a{}^\beta{}_{\bar\gamma}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma}) \\ + X^\alpha(\partial_\alpha{}^{vv}Y^{\bar\beta} + {}^{cc}\Gamma_\alpha{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) + \left(y^\varepsilon\partial_\varepsilon X^\alpha\right)(\partial_{\bar\alpha}{}^{vv}Y^\beta + {}^{cc}\Gamma_{\bar\alpha}{}^\beta{}_K{}^{vv}Y^K) \end{pmatrix} \end{pmatrix} $$

$$
= \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ X^{\alpha}(\partial_{\alpha}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{c} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}}{}^{vv}Y^{\gamma} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}) \\ +\left(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}Y^{\beta} + {}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ K}^{\ \beta}{}^{vv}Y^{K}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ X^{\alpha}(\partial_{\alpha}{}^{vv}Y^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}{}^{vv}Y^{\gamma}) + \left(y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right) \\ (\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{c} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\gamma} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar{\gamma}}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta} + \Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_{X}Y)^{\beta} \end{pmatrix}
$$

$$
= {}^{vv}(\nabla_{X}Y)
$$

şeklindeki bileşenlere sahip olan ${}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{X}}{}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_{X}Y)$ denklemi elde edilir. Burada $K = (c, \gamma, \bar{\gamma})$ ile tanımlıdır.

∇ izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere $X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümü ile tanımlı M_n üzerinde izdüşümlü vektör alanı verilmiş olsun. $\widetilde{X}$ izdüşümlü vektör alanına göre Lie

türevi tanımından $L_{\widetilde{X}}\nabla$, $\Im_2^1(B_m)$ nin bir elemanı olup keyfi $\widetilde{Y},\widetilde{Z}\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$$(L_{\widetilde{X}}\nabla)(\widetilde{Y},\widetilde{Z})=L_{\widetilde{X}}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})-\nabla_{\widetilde{Y}}(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})-\nabla_{\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z} \tag{4.12}$$

eşitliği geçerlidir.

Eğer $L_{\widetilde{X}}\nabla=0$ ise $\widetilde{X}=\widetilde{X}^a(x^a,x^\alpha)\partial_a+X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ bileşenleri ile verilen $\widetilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$ (Vishnevskii 2002) izdüşümlü vektör alanı, ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonuna sahip m-boyutlu B_m manifoldunda bir infinitesimal lineer dönüşüm (affin tanımından) Tanaka (1969), Vishnevskii (2002) olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.5: ∇, B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\in\Im_0^1(M_n)$ keyfi izdüşümlü vektör alanları için

$$(L_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\nabla)({}^{cc}\widetilde{Y},{}^{cc}\widetilde{Z})={}^{cc}\left((L_{\widetilde{X}}\nabla)(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (4.6) ve Teorem 4.2.1, (4.12)'de yerine yazılırsa

$$(L_{\widetilde{X}}\nabla)(\widetilde{Y},\widetilde{Z})=L_{\widetilde{X}}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})-\nabla_{\widetilde{Y}}(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})-\nabla_{\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}(L_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\nabla)({}^{cc}\widetilde{Y},{}^{cc}\widetilde{Z})&=L_{{}^{cc}\widetilde{X}}({}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}\,{}^{cc}\widetilde{Z})-{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}(L_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\widetilde{Z})-{}^{cc}\nabla_{\left[{}^{cc}\widetilde{X},{}^{cc}\widetilde{Y}\right]}\,{}^{cc}\widetilde{Z}\\&=L_{{}^{cc}\widetilde{X}}({}^{cc}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}))-{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\widetilde{Y}}\left({}^{cc}(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})\right)-{}^{cc}\nabla_{{}^{cc}\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\,{}^{cc}\widetilde{Z}\end{aligned}$$

$$= {}^{cc}\left(L_{\widetilde{X}}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})\right) - {}^{cc}\left(\nabla_{\widetilde{Y}}(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})\right) - {}^{cc}\left(\nabla_{\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z}\right)$$

$$= {}^{cc}\left(L_{\widetilde{X}}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}) - \nabla_{\widetilde{Y}}(L_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}) - \nabla_{\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]}\widetilde{Z}\right)$$

$$= {}^{cc}\left((L_{\widetilde{X}}\nabla)(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\right)$$

şeklinde bileşenlere sahip olduğundan, $(L_{{}^{cc}\widetilde{X}}\,{}^{cc}\nabla)({}^{cc}\widetilde{Y},{}^{cc}\widetilde{Z}) = {}^{cc}\left((L_{\widetilde{X}}\nabla)(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\right)$ eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki teorem kullanılarak Teorem 4.3.6 elde edilir.

Teorem 4.3.6: Eğer $\widetilde{X} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ izdüşümlü vektör alanı ∇ izdüşümlü lineer konneksiyonu ile birlikte verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin bir infinitesimal dönüşümü ise ${}^{cc}\widetilde{X}$ vektör alanı da ${}^{cc}\nabla$ izdüşümlü lineer konneksiyonu ile birlikte verilen $t(B_m)$ yarı-tanjant demetinin bir infinitesimal dönüşümüdür.

Teorem 4.3.7: $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$,sırasıyla, $X \in \mathfrak{I}_0^1(B_m)$ ve $Y \in \mathfrak{I}_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı M_n üzerindeki izdüşümlü vektör alanları olmak üzere

i. ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{HH}\widetilde{Y} = 0$,

ii. ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}\,{}^{vv}Y = {}^{vv}\left(\nabla_X Y\right)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: i. $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} \left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^b \\ \left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^\beta \\ \left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b, x^\beta, x^{\overline{\beta}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}\,{}^{HH}\widetilde{Y}$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{J} = {}^{vv}X^{a}\,{}^{cc}\nabla_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{J} + {}^{vv}X^{\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{J} + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{J}$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=b$ için

$$\begin{aligned}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{b} &= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{b} + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{b} + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{b}\\ &= X^{a}\Big(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{b}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}}\Big)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\beta$ için

$$\begin{aligned}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{\beta} &= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\beta} + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\beta}\\ &= X^{a}\Big(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{\beta}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}}\Big)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{\bar{\beta}} &= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\,{}^{cc}\nabla_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}} + {}^{vv}X^{\bar{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}\\ &= X^{a}\Big(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}Y^{\bar{\beta}} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \bar{\beta}}}_{\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}}\underbrace{{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}}_{Y^{\gamma}} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}}\Big)\\ &= X^{a}\left(-\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\varepsilon}}_{\delta_{a}^{\varepsilon}}\Gamma_{\varepsilon\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma} + \Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma}\right)\\ &= X^{a}\left(-\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma} + \Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ${}^{cc}\nabla_{{}^{vv}X}{}^{HH}\widetilde{Y}=0$ eşitliği gösterilmiş olur.

ii. $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Im_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^b\\ \left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^\beta\\ \left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^{\bar\beta}\end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b,x^\beta,x^{\bar\beta})$ indirgenmiş koordinatlarına göre $\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)$ nin bileşenleri olmak üzere

$$\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^J={}^{HH}\widetilde{X}^a\,{}^{cc}\nabla_a{}^{vv}Y^J+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha\,{}^{cc}\nabla_\alpha{}^{vv}Y^J+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\bar\alpha}{}^{vv}Y^J$$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=b$ için

$$\begin{aligned}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^b&={}^{HH}\widetilde{X}^a\,{}^{cc}\nabla_a{}^{vv}Y^b+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha\,{}^{cc}\nabla_\alpha{}^{vv}Y^b+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\bar\alpha}{}^{vv}Y^b\\&=X^a(\partial_a\underbrace{{}^{vv}Y^b}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar\gamma}^{\ b}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&\quad+X^\alpha(\partial_\alpha\underbrace{{}^{vv}Y^b}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar\gamma}^{\ b}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar\alpha}(\partial_{\bar\alpha}\underbrace{{}^{vv}Y^b}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ c}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ \gamma}^{\ b}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ \bar\gamma}^{\ b}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\beta$ için

$$\begin{aligned}\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^\beta&={}^{HH}\widetilde{X}^a\,{}^{cc}\nabla_a\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha\,{}^{cc}\nabla_\alpha\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\bar\alpha}\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}\\&=X^a(\partial_a\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{a\ c}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{a\ \bar\gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&\quad+X^\alpha(\partial_\alpha\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\alpha\ \bar\gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar\alpha}(\partial_{\bar\alpha}\underbrace{{}^{vv}Y^\beta}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ c}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^c}_{0}+{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ \gamma}^{\ \beta}\underbrace{{}^{vv}Y^\gamma}_{0}+\underbrace{{}^{HH}\Gamma_{\bar\alpha\ \bar\gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{vv}Y^{\bar\gamma})\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (4.3), (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\overline{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y\right)^{\overline{\beta}} &= {}^{HH}\widetilde{X}^{a}\,{}^{cc}\nabla_{a}{}^{vv}Y^{\overline{\beta}} + {}^{HH}\widetilde{X}^{\alpha}\,{}^{cc}\nabla_{\alpha}{}^{vv}Y^{\overline{\beta}} + {}^{HH}\widetilde{X}^{\overline{\alpha}}\,{}^{cc}\nabla_{\overline{\alpha}}{}^{vv}Y^{\overline{\beta}} \\
&= X^{a}(\underbrace{\partial_{a}Y^{\beta}}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{a}{}^{\overline{\beta}}{}_{c}\underbrace{{}^{vv}Y^{c}}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{a}{}^{\overline{\beta}}{}_{\gamma}\underbrace{{}^{vv}Y^{\gamma}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a}{}^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\gamma}}}_{0}{}^{vv}Y^{\overline{\gamma}}) \\
&\quad + X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta} + {}^{cc}\Gamma_{\alpha}{}^{\overline{\beta}}{}_{c}\underbrace{{}^{vv}Y^{c}}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{\alpha}{}^{\overline{\beta}}{}_{\gamma}\underbrace{{}^{vv}Y^{\gamma}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha}{}^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\gamma}}}_{\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}}\underbrace{{}^{vv}Y^{\overline{\gamma}}}_{Y^{\gamma}}) \\
&\quad + X^{\alpha}(\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}Y^{\beta}}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}{}_{c}\underbrace{{}^{vv}Y^{c}}_{0} + {}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}{}_{\gamma}\underbrace{{}^{vv}Y^{\gamma}}_{0} + \underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}}{}^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\gamma}}}_{0}{}^{vv}Y^{\overline{\gamma}}) \\
&= X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta} + \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}Y^{\gamma}) \\
&= \left(\nabla_{X}Y\right)^{\beta}
\end{aligned}$$

bulunur. $(x^{b},x^{\beta},x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t(B_m)$ üzerinde ${}^{vv}\left(\nabla_{X}Y\right)$ nin bileşenleri

$${}^{vv}\left(\nabla_{X}Y\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\\left(\nabla_{X}Y\right)^{\beta}\end{pmatrix}$$

şeklinde olup ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{vv}Y={}^{vv}\left(\nabla_{X}Y\right)$ eşitliği gösterilmiş olur.

∇, B_m üzerinde izdüşümlü lineer konneksiyon olmak üzere yatay liftin (3.2) tanımından ve (2.8)'den keyfi $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Im_{0}^{1}(M_n)$ izdüşümlü vektör alanları için

$${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}={}^{HH}\left(\nabla_{X}Y\right)+\gamma(R(\,,X)Y)$$

eşitliği elde edilir. Burada $R(\,,X)Y$, B_m üzerinde (1,1) tipli bir F tensör alanı olup keyfi $Z\in\Im_{0}^{1}(B_m)$ vektör alanı için $F(Z)=R(Z,X)Y$ şeklinde tanımlıdır.

İspat: $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Im_0^1(M_n)$ ve $\begin{pmatrix} {}^{HH}\widetilde{X}^I(\partial_I{}^{HH}\widetilde{Y}^b+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\ {}^{HH}\widetilde{X}^I(\partial_I{}^{HH}\widetilde{Y}^\beta+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\ {}^{HH}\widetilde{X}^I(\partial_I{}^{HH}\widetilde{Y}^{\overline{\beta}}+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ \overline{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\end{pmatrix}$, $t(B_m)$ yarı-tanjant demette $(x^b,x^\beta,x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}$ nin bileşenleri olmak üzere

$$ {}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^J=\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^J $$

eşitliği geçerlidir. Burada (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=b$ için

$$\begin{aligned}
{}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^b&=\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^b\\
&={}^{HH}\widetilde{X}^I(\partial_I{}^{HH}\widetilde{Y}^b+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\
&={}^{HH}\widetilde{X}^a(\partial_a{}^{HH}\widetilde{Y}^b+{}^{cc}\Gamma_{a\ K}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha(\partial_\alpha{}^{HH}\widetilde{Y}^b+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ K}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)+{}^{HH}\widetilde{X}^{\overline{\alpha}}(\partial_{\overline{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^b+{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}\ K}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\
&={}^{HH}\widetilde{X}^a(\underbrace{\partial_a\widetilde{Y}^b}_{0}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^c+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^\gamma+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \overline{\gamma}}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\overline{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha(\partial_\alpha\widetilde{Y}^b+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^c+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ b}{}^{HH}\widetilde{Y}^\gamma+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \overline{\gamma}}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\overline{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\overline{\alpha}}(\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}\widetilde{Y}^b}_{0}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}\ c}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^c+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}\ \gamma}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^\gamma+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}\ \overline{\gamma}}^{\ b}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\overline{\gamma}})\\
&=X^\alpha(\partial_\alpha\widetilde{Y}^b+\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ b}Y^\gamma)\\
&={}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^b
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\beta$ için

$$\begin{aligned}
{}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^\beta&=\left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^\beta\\
&={}^{HH}\widetilde{X}^I(\partial_I{}^{HH}\widetilde{Y}^\beta+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\
&={}^{HH}\widetilde{X}^a(\partial_a{}^{HH}\widetilde{Y}^\beta+{}^{cc}\Gamma_{a\ K}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^\alpha(\partial_\alpha{}^{HH}\widetilde{Y}^\beta+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ K}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)+{}^{HH}\widetilde{X}^{\overline{\alpha}}(\partial_{\overline{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^\beta+{}^{cc}\Gamma_{\overline{\alpha}\ K}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= {}^{HH}\widetilde{X}^{a}(\underbrace{\partial_{a}Y^{\beta}}_{0}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar{\alpha}}(\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{\beta}}_{0}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \beta}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&= X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\beta}+\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma})\\
&= {}^{HH}\left(\nabla_{X}Y\right)^{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak (4.7) ve (4.11) kullanılarak, $J=\bar{\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}\left(\nabla_{X}Y\right)^{\bar{\beta}} &= \left({}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}\right)^{\bar{\beta}}\\
&= {}^{HH}\widetilde{X}^{I}(\partial_{I}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+{}^{cc}\Gamma_{I\ K}^{\ \bar{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{K})\\
&= {}^{HH}\widetilde{X}^{a}(\partial_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+{}^{cc}\Gamma_{a\ K}^{\ \bar{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{K})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\alpha}(\partial_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ K}^{\ \bar{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{K})+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ K}^{\ \bar{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{K})\\
&= {}^{HH}\widetilde{X}^{a}(\partial_{a}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ c}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \gamma}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{a\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\alpha}(\partial_{\alpha}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ c}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \bar{\beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\alpha\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}}}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&\quad+{}^{HH}\widetilde{X}^{\bar{\alpha}}(\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\beta}}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ c}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{c}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \gamma}^{\ \bar{\beta}}}_{\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\gamma}+\underbrace{{}^{cc}\Gamma_{\bar{\alpha}\ \bar{\gamma}}^{\ \bar{\beta}}}_{0}{}^{HH}\widetilde{Y}^{\bar{\gamma}})\\
&= X^{a}(\partial_{a}(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}Y^{\phi}))+X^{\alpha}(\partial_{\alpha}(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}Y^{\phi})\\
&\quad+y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}Y^{\gamma}))+\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \gamma}Y^{\beta})\\
&\quad+(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \alpha}Y^{\phi})(\partial_{\bar{\alpha}}(-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \sigma}^{\ \beta}Y^{\sigma})+\Gamma_{\alpha\ \sigma}^{\ \beta}Y^{\sigma})\\
&= X^{a}((-\partial_{a}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta})y^{\varepsilon}Y^{\phi})+X^{\alpha}(-\partial_{\alpha}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta})y^{\varepsilon}Y^{\phi})\\
&\quad-y^{\varepsilon}X^{a}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}(\partial_{a}Y^{\phi})-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}(\partial_{\alpha}Y^{\phi})\\
&\quad+X^{\alpha}(\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta})y^{\varepsilon}Y^{\gamma}-X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta}\Gamma_{\varepsilon\ \sigma}^{\ \gamma}y^{\varepsilon}Y^{\sigma})\\
&= X^{\alpha}Y^{\phi}y^{\varepsilon}(-\partial_{\alpha}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}+\partial_{\varepsilon}\Gamma_{\alpha\ \phi}^{\ \beta}-\Gamma_{\alpha\ \sigma}^{\ \beta}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \sigma}+\Gamma_{\varepsilon\ \sigma}^{\ \beta}\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \sigma})\\
&\quad-\Gamma_{\varepsilon\ \sigma}^{\ \beta}\Gamma_{\alpha\ \phi}^{\ \sigma}X^{\alpha}Y^{\phi}y^{\varepsilon}-\Gamma_{\varepsilon\ \phi}^{\ \beta}y^{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\phi}\\
&= y^{\varepsilon}R_{\varepsilon\alpha\phi}{}^{\beta}X^{\alpha}Y^{\phi}+{}^{HH}\left(\nabla_{X}Y\right)^{\bar{\beta}}
\end{aligned}
$$

bulunur. ${}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)+\gamma(R(\ ,X)Y)$ nin $t(B_m)$ yarı-tanjant demetteki $(x^b, x^\beta, x^{\overline{\beta}})$ koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)+\gamma(R(\ ,X)Y)=\begin{pmatrix} {}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^b \\ {}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^\beta \\ {}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon R_{\varepsilon\alpha\phi}{}^\beta X^\alpha Y^\phi \end{pmatrix} $$

şeklinde olup ${}^{cc}\nabla_{{}^{HH}\widetilde{X}}{}^{HH}\widetilde{Y}={}^{HH}\left(\nabla_X Y\right)+\gamma(R(\ ,X)Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

5. SONUÇ

(1) Sunulan bu tezde ilk olarak yarı-tanjant demetin güzel kare dönüşümüne somut bir örnek olduğu gösterildi.

(2) Yarı-tanjant (pull-back) demetlerde izdüşümlü lineer konneksiyonlara ait dikey, tam ve yatay lift problemleri ilk kez ele alınmıştır.

(3) Yarı-tanjant demette infinitesimal lineer dönüşümler ilk kez ele alınmıştır.

KAYNAKLAR

Ay, S., 2013. Yarı Tanjant Demet. (Y. Lisans Tezi), Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Bednarska A., 2013. On lifts of projectable-projectable classical linear connections to the cotangent bundle. Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, Mathematica, 67 (1), 1-10.

Bishop, R. L. and Goldberg S. I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, p.19-135, New York USA.

Duc, T.V., 1979. Structure presque-transverse. J. Diff . Geom., 14 (2), 215-219.

Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1995. Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Manifolds. Acta Applicandae Mathematicae, 38 (2), 197-215.

Etayo F., 1991. The geometry of good squares of vector bundles. Riv. Mat. Univ. Parma 17 (4) 131–147.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara Üniversitesi, 269, Türkiye.

Husemoller, D., 1994. Fibre Bundles. Springer. 376, New York.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Vol. I, Interscience Publishers, New York-London.

Lawson, H. B. and Michelsohn M. L., 1989. Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.

Ledger, A. J. and Yano K., 1965. The tangent bundle of a locally symmetric space. Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Mikulski W. M., 2007. On the existence of prolongation of connections by bundle functors, Extracta Math. 22 (3), 297–314.

Morimoto, A., 1970. Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order. Nagoya Math. Jour., 40, 99-120.

O'Neill, B., 1983. Semi-riemannian with applications to relativity. Academic Press, New York, London.

Ostianu, N. M., 1974. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem., 5, VINITI, 259–309, Moscow.

Polat, M., 2018. Complete lifts of vector fields to the special class of semi-tensor bundle. Konuralp Journal of Mathematics, 6 (2), 332-337.

Polat, M. and Cengiz, N., 2018. Some properties of semi-tensor bundle. New Trends In Mathematical Science, 6 (3), 147-153.

Pontryagin, L. S., 1962. Characteristic classes of differentiable manifolds. Transl. Amer. Math. Soc., 7, 279-331.

Poor, W. A., 1981. Differential Geometric Structures. McGraw-Hill, New York.

Salimov, A. A. and Kadıoğlu E., 2000. Lifts of derivations to the semitangent bundle. Turk J. Math, 24, 259-266.

Salimov, A. A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. Jour. J., 10, 338-358.

Steenrod, N., 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Ankara Nobel Yayınları.

Tanaka N., 1969. On infinitesimal automorphisms of Siegel domains, Proc. Japan Acad. 45 (5), 335-338.

Vishnevskii, V. V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci., 108 (2), 151-187, New York.

Vishnevskii, V. V., Shirokov A. P. and Shurygin V. V., 1985. Spaces over Algebras. Kazan. Kazan Gos. Univ. Russian.

Włodzimierz M., Tomáš J., 2009. Reduction for natural operators on projectable connections, Demonstratio Mathematica, 42 (2), 435-439

Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles. Jour. Math. and Mech., 16, 1015-1030.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Patterson E. M., 1967. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles. Jour. of Math. Soc. Japan, 19 (1), 91-113.

Yıldırım, F., 2018. Diagonal lift in the semi-tanget bundle and its applications. Trasactions of NAS of Azerbaijan, 38 (4), 134-148.

ÖZGEÇMİŞ

Murat POLAT 1984 yılında Siirt'te dünyaya geldi. İlk öğrenimini Siirt'te tamamladı. Orta öğrenimini Diyarbakır Ali Emiri İ.Ö.O. ve Lise öğreniminide Diyarbakır Ziya Gökalp Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında girdiği Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Bozok Üniversitesi Rektörlüğünde memur olarak göreve başladı ve 2009 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Dicle Üniversitesi Rektörlüğü'ne tayin oldu. Halen burada görevini sürdürmektedir.